doi: 10.7690/bgzdh.2015.02.009

一种基于武器效用的武器目标分配模型

王金山，李伟兵
（陆军军官学院基础部，合肥 230031）

摘要：为解决武器优化分配中存在的 2 个问题，提出一种基于武器效用的武器目标分配模型。通过两类武器的效用分析，把目标达到期望毁伤概率作为武器效用最大的起点，设置两类武器的效用函数，以最大武器效用为准则，建立武器分配的线性整数规划模型，并对比 2 种模型的结果。实践结果证明：新模型求解分配的速度快耗时短，可满足战场需求，且结果更加合理。

关键词：武器分配；边际效用递减原理；效用分析；最大武器效用准则；线性整数规划
中图分类号：TJ03 **文献标志码**：A

A Weapon Target Assignment Model Based on Weapon Utility

Wang Jinshan, Li Weibing
(*Department of Basic Theories*, *Army Officer Academy*, *Hefei* 230031, *China*)

Abstract: In order to overtake two problems in weapon optimal assignment, propose a weapon target assignment model based on weapon utility. By two type weapons utility analysis, set expected kill probability as the start point of maximum weapon utility, and set utility function of two type weapons, takes maximum weapon utility as rule, establish linear integer planning model, and compare the results of two models. The practice results show that the new model has fast speed on solution distribution and use less time. It meets the battlefield requirements and has more reasonable results.

Keywords: weapon assignment; law of marginal utility decreasing; utility analysis; rule of maximum weapon utility; linear integer programming

0 引言

武器目标分配(weapon target assignment，WTA)是作战指挥特别是火力运用的一个重要问题[1]，其核心是针对敌方目标，科学、合理地分配我方不同型号的武器，构建整体优化的火力打击方案，有效消除敌方目标的威胁。武器目标分配也是指挥自动化系统(C^4ISR)的关键组成部分[2]，为现代作战指挥提供了不可缺少的决策支持。文献[1-3]综述了该问题的研究现状和进展，文献[4-7]提出了求解该问题的智能优化算法。分配准则的选择是武器目标分配模型的重要部分，文献[1-2]对其表述有较大差异，例如我方总消耗、我方潜在威胁最小化准则和敌方毁伤价值最大化准则。不同优化准则反映了指挥员不同的决策方向，决定了不同形式的目标函数，但共同点是上述准则均基于期望值。

效用理论及前景理论[8-10]提出后，人们认识到决策者对方案的满意程度不取决于准则本身，而取决于其效用，且效用遵循边际效用递减原理，即效用值随着准则值的增加而增加，但达到特定值后，效用的增量趋于停滞。而追求高毁伤概率不符合上述原理。至此，现有模型存在 2 个问题：1) 敌目标价值的评估在不同战场环境下差异很大，作为通用的模型参数不合适；2) 用目标价值的毁伤期望值作为分配准则不符合边际效用递减原理。把武器效用作为优化准则解决武器分配中存在的问题是值得研究的方向。笔者运用效用理论原理对武器或武器集合进行效用分析，并遵循边际效用递减原理，考虑随着毁伤概率的提升效用的增加几乎停滞这一实际，基于效用准则提出了一种基于武器效用的武器目标分配模型。

1 武器效用分析

假设有多个武器打击同一目标的毁伤概率分别为 p_i, i=l, 2,⋯, n，如果联合毁伤概率可表示为

$$p=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

则称该类武器为毁伤单元[11]。毁伤单元由武器构成，如某型号的单个武器，也可为同型号的多个武器和不同型号的多个武器。假设本文中所提到的武器均为毁伤单元。

效用的本意是指一种主观意愿的满足程度，这

收稿日期：2014-08-18；修回日期：2014-09-24
基金项目：院校武器装备军内科研计划项目(总参谋部军训部)JNKY2012015；陆军军官学院科研基金项目(陆军军官学院)YNKY2012015
作者简介：王金山(1962—)，男，安徽人，研究生，教授，研究生导师，从事军事预测与决策分析研究。

种满足程度基于个人实际意愿。如某件武器对敌目标的毁伤概率使指挥员的满意程度最大，则记其效用为 1，记满意程度最小的效用为 0，最好和最差之间的效用介于 0 和 1。

武器的效用由指挥员的满意程度产生，大小决定于武器对目标的毁伤概率，但最大效用不是毁伤达到数学意义上的绝对事件。如一门火炮对目标的命中概率为 p，假设炮弹命中即毁伤，则毁伤概率等同于命中概率亦为 p，则 n 门火炮独立射击目标的毁伤概率应为 $1-(1-p)^n$。当 $n\to\infty$ 时，联合毁伤概率逼近于 1，但当 n 大于某个值后，毁伤概率的提升带来的效用增量微弱，消耗的武器数量却很大。故武器的最大效用不是其对敌目标的毁伤概率达到 1，而是毁伤概率不低于某个值 $p_{\rm e}$，称为期望毁伤概率，定义此时为武器效用为 1 的起点，超过起点后效用不再增加，符合边际效用递减原理。

基于上述分析提出武器集合的效用函数，设我方共 m 类武器，第 i 类型号武器的集合为 M_i，敌方目标数量为 n 个，分配于第 j 个目标的武器集合为 C_j，产生的毁伤概率为 P，构成 C_j 的子集为 $c_{1j}, c_{2j},\cdots, c_{mj}$，分别表示各类武器打击第 j 个目标的集合。武器集合 C_j 产生的效用记为 $U(C_j)$，设定效用函数为

$$U(C_j)=u_j(P)=\begin{cases}\dfrac{1}{p_{\rm e}^{\alpha}}\bullet P^{\alpha}, \text{if } P<p_{\rm e}\\ 1, \text{if } P\geqslant p_e\end{cases} \tag{1}$$

上述函数为打击第 j 个目标的武器集合的效用函数，称第一类武器效用函数。参数的意义：$p_{\rm e}$ 为期望毁伤概率；α 为边际效用参数，第一类武器效用函数有 $\alpha>1$，表明在达到期望毁伤概率前，效用函数是风险偏好型的凸函数，边际效用是增加的，达到期望毁伤概率后，边际效用为零，如图 1 所示。

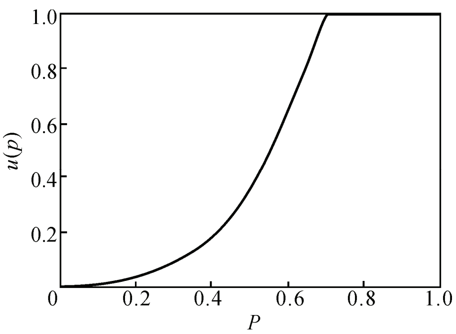

图 1 第一类武器效用函数

第一类武器效用是针对指定目标的武器集合的分析，故单件武器效用不可加。在武器分配时，要预留一定的空闲武器，并要求用于分配目标的武器总数量最少[12]，其前提是已分配武器对已知目标的毁伤概率达到期望毁伤概率。波次规划[13]中，空闲武器存在效用，考虑：1) 一波次打击未达到满意毁伤，需补充打击；2) 敌新目标突现，需存在可分配的空闲武器。2 种情况若出现会降低前期的作战成果，故空闲武器针对突现目标或未达到满意毁伤的目标产生的效用是较大的。基于上述分析，假设单件第 i 型号武器空闲，设定其效用函数的依然为式 (1) 的形式，为第 i 类空闲武器的效用函数，称第二类武器效用函数。其参数的意义相同，但边际效用参数满足 $0<\alpha<1$，表明在达到期望毁伤概率前，效用函数是风险厌恶型的凹函数，边际效用是减小的，达到期望毁伤概率后，边际效用为零，如图 2。

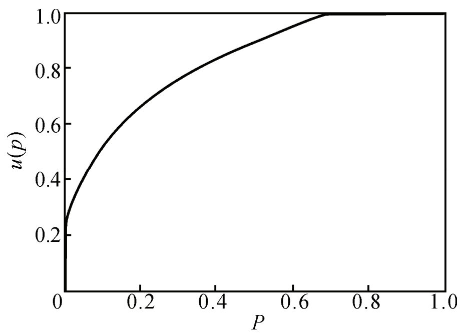

图 2 第二类武器效用函数

较第一类武器效用中单件武器效用不可加性，第二类武器效用是可加的，即有

$$U(M_i-\bigcup_{j=1}^{n}c_{ij})=r_i\bullet u_i(p)$$

其中 r_i 为第 i 型号空闲武器的数目。

2 基于武器效用的武器目标分配模型

基于武器效用分析过程，笔者用武器效用代替敌期望毁伤作为分配准则。把武器目标的分配方案矩阵记为 $\boldsymbol{X}_{i\times j}$，它的元素 x_{ij} 表示分配第 i 型号武器打击第 j 个目标的数目

$$x_{ij}=\begin{cases}a,\forall a>0 \text{ 分配}a\text{件武器}i\text{打击第}j\text{个目标}\\ 0 \text{ 未分配}i\text{型号的武器打击第}j\text{个目标}\end{cases}$$

现有的武器目标分配问题的模型可抽象为以下非线性整数规划

$$\max f=\sum_{j=1}^{n}v_j\bullet(1-\prod_{i=1}^{m}(1-p_{ij})^{x_{ij}})$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant m_i\\ x_{ij}\geqslant 0 \text{ and integer } (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)\end{cases} \tag{2}$$

某波次作战中，我有 m 类武器，第 i 类武器数

目为 m_i，敌目标数量为 n，有敌新目标突现的可能，敌目标的价值无法评估。上级给定了期望毁伤概率 $L_{1\times j}$，第 i 类武器打击第 j 个目标的毁伤概率 p_{ij} 构成毁伤矩阵 $P_{i\times j}$。以最大第一类武器效用为准则，可得规划

$$\max\ U_J=\sum_{j=1}^{n}U(C_j)=\sum_{j=1}^{n}u_j\Big(1-\prod_{i=1}^{m}(1-p_{ij})^{x_{ij}}\Big)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant m_i & \text{可分配的各型号武器的数目约束}\\ x_{ij}\geqslant 0 \text{ and integer } (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)\end{cases}\tag{3}$$

武器不充裕时，式 (3) 的最优解是唯一的。在武器充裕时，最优解有无穷多个，式 (3) 仍存在可优化性。若式 (3) 取到最优解 n，则武器分配能满足所有目标达到期望毁伤概率，将最优解的条件作为约束条件加入到规划，满足期望毁伤概率的约束为

$$1-\prod_{i=1}^{m}(1-p_{ij})^{x_{ij}}\geqslant L_j,\ j=1,\cdots,n$$

该约束是复杂的非线性函数，不便于规划的求解，需将其转化为线性的约束条件

$$\sum_{i=1}^{m}\ln(1-p_{ij})\bullet x_{ij}\leqslant \ln(1-L_j),\ j=1,\cdots,n$$

以第二类武器效用最大化为目标，加入上述线性约束，可将公式 (3) 转化为

$$\max\ U_1=\sum_{i=1}^{m}U\Big(M_i-\bigcup_{j=1}^{n}c_{ij}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{r_i}{n}\bullet\sum_{j=1}^{n}u_i(p_{ij})\Big)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant m_i & \text{可分配的各型号武器的数目约束}\\ \sum\limits_{i=1}^{m}\ln(1-p_{ij})\bullet x_{ij}\leqslant \ln(1-L_j) & \text{规划(3)最优条件}\\ x_{ij}\geqslant 0 \text{ and integer } (\forall i=1,\cdots,m;\forall j=1,\cdots,n)\end{cases}\tag{4}$$

式 (4) 是一个线性整数规划，引入松弛变量后可用单纯形法求解相应的松弛问题，在单纯形法最优解基础上采用分枝定界法或割平面法求得整数最优解，因此相比式 (2) 和式 (3) 的非线性整数规划，式 (4) 的线性整数规划求解容易很多，耗时极短，并可得到全局最优解。笔者采用 LINGO 软件计算，求解的速度能满足战场需求。

对于实际的应用问题，模型的应用步骤如下：

1) 进行式 (4) 的线性整数规划分配模型求解，若得到最优解，则此时的最优解即为最优武器目标分配方案，分配结束，退出；若无最优解，说明该部队不能满足打击目标的最基本要求，转到 2)；

2) 进行式 (3) 的非线性整数规划分配模型求解，若得到最优解，此时的最优解即为最优武器目标分配方案，分配结束，退出。

3　分配案例

某混编防空部队装备了若干武器，设共有 6 类武器可作为毁伤单元用于防空打击，数目分别为 m=[8, 10, 7, 10, 10, 8]。在某次作战中，空中预警发现有 4 类 7 个来袭目标，记为目标 A, B, C 和 D，数目分别为[2, 2, 2, 1]，它们的价值无法评估，上级命令予以打击，针对 4 类目标的期望毁伤概率 p=[0.90, 0.90, 0.90, 0.95]，武器对目标的毁伤概率见表 1。

表 1　毁伤概率矩阵 $\boldsymbol{P}_{i\times j}$

武器	目标 A	目标 B	目标 C	目标 D
武器 1	0.30	0.15	0.10	0.20
武器 2	0.30	0.10	0.25	0.27
武器 3	0.05	0.16	0.27	0.30
武器 4	0.30	0.20	0.25	0.25
武器 5	0.23	0.15	0.30	0.15
武器 6	0.20	0.34	0.20	0.10

且该部空域还有新目标来袭的可能性。

取 α=1/4，该值为体现风险厌恶的边际效用系数，越接近 1，风险厌恶越弱。根据基于武器效用的武器目标分配模型的应用步骤，通过 LINGO 软件的实际计算，得到全局最优解，表明此时的最优解即为最优武器目标分配方案，记为 $\boldsymbol{S}_1$。

$$\boldsymbol{S}_1=\left[\begin{array}{c|ccccccc} & t_A & t_A & t_B & t_B & t_C & t_C & t_D\\ \hline w_1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ w_2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5\\ w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4\\ w_4 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0\\ w_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0\\ w_6 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

在 $\boldsymbol{S}_1$ 方案下，剩余 2 件武器 4，对已知各个目标造成的毁伤概率分别为 p=[0.917 6, 0.917 6, 0.902 8, 0.902 8, 0.911 8, 0.900 6, 0.950 2]，均满足期望毁伤概率。在敌目标价值等同的条件下，若以敌期望毁伤为准则，采用式 (2) 的模型计算，可得最优分配方案，记为 $\boldsymbol{S}_2$。

$$\boldsymbol{S}_2=\left[\begin{array}{c|ccccccc} & t_A & t_A & t_B & t_B & t_C & t_C & t_D\\ \hline w_1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ w_2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7\\ w_4 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 & 0\\ w_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0\\ w_6 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

(下转第 48 页)