

doi: 10.7690/bgzdh.2014.10.022

斜结构奇异值及其在实参数不确定性导弹鲁棒稳定性评估中的应用

侯振乾¹, 梁晓庚¹, 王文正², 刘凯³

(1. 西北工业大学自动化学院, 西安 710072; 2. 中国空气动力研究与发展中心空气动力学国家重点实验室, 四川 绵阳 621000; 3. 中国空空导弹研究院控制所, 河南 洛阳 471009)

摘要: 针对结构奇异值(μ)存在计算量大、下界不易计算等问题, 提出基于斜结构奇异值的评估方法。将系统频率看作 1 个实不确定参数, 构建不确定系统的状态空间表达式, 将某一频率范围内各频点对应的结构奇异值计算问题转化为单个的斜结构奇异值计算, 给出 2 种算法分别计算斜结构奇异值的上下界, 并对实参数不确定性导弹的鲁棒稳定性评估对所提方法的准确性和实用性进行验证。结果表明: 该方法是一种高效且准确的鲁棒稳定性评估方法, 适用于工程应用。

关键词: 斜结构奇异值; 鲁棒稳定性; 实不确定性参数; 导弹

中图分类号: TJ765.2 **文献标志码:** A

Skew μ Applied to Robust Stability Evaluation of Missiles with Real Uncertain Parameters

Hou Zhenqian¹, Liang Xiaogeng¹, Wang Wenzheng², Liu Kai³

(1. College of Automation, Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, China; 2. State Key Laboratory of Aerodynamics, China Aerodynamics Research & Development Center, Mianyang 621000, China; 3. Guidance & Control Department, China Airborne Missile Academy, Luoyang 471009, China)

Abstract: The structured singular value (μ) has disadvantages, such as the calculation burden is heavy and its lower bound is not easy to calculate, so an evaluation method based on skew μ is developed. Taking frequency as a real uncertain parameter and constructing the state space expression of the uncertain system, then calculation of μ within a fixed frequency range converts to calculation of a single skew μ . Two algorithms are given to calculate the upper and lower bounds of skew μ respectively. The robust stability analysis of missile with real parameter uncertainty is carried out to validate the accuracy and practicability of the proposed method. The results show that the proposed method is efficient and accurate, and it's suitable for engineering application.

Keywords: skew singular value (μ); robust stability; real uncertain parameters; missile

0 引言

对于很多物理系统来说, 需要考虑参数不确定性对系统的稳定性和性能的影响。结构奇异值 μ 是分析参数不确定系统鲁棒稳定性和性能的很好方法^[1], 但是其计算存在一些问题。结构奇异值不能得到准确值, 只能用上下界来表示。复参数不确定系统的结构奇异值可以得到较好结果, 其上下界差别不太大。实参数不确定系统的结构奇异值则很难得到较好的结果, 其上下界差别很大, 有时甚至不能计算其下界^[2-3]。这时系统鲁棒稳定性分析结果会产生很大的误差, 并且得不到最坏情况时各不确定参数的准确摄动信息^[4]。另一方面, 由于需要在某一频率范围内的各频点计算 μ , 会产生较大的计算负担, 相邻频点之间间隔大小的选择会影响计算结果的精度^[5]。

导弹气动参数、质量以及传感器参数在导弹飞行过程中都会产生变化。利用结构奇异值可以对参

数不确定导弹的鲁棒稳定性进行评估^[6-9]。与传统频域方法相比, 基于 μ 分析的评估方法更加全面, 但是由于前述原因, 评估过程在计算精度及计算效率方面存在不足。

G. Ferreres 提出了斜结构奇异值的概念, 并给出了其上下界的计算方法^[10]。笔者在此基础上, 提出改进斜结构奇异值上下界的计算方法, 并将其用于对实参数不确定性导弹的鲁棒稳定性评估。

1 斜结构奇异值

基本上可以将任何含有结构型或非结构型范数有界不确定性的线性时不变 (linear time invariant, LTI) 系统表示为图 1 中的形式。其中 M 表示系统的已知部分, Δ 表示系统的不确定部分。将图 1 中的 $M \in C^{n \times n}$ 表示为:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

收稿日期: 2014-05-13; 修回日期: 2014-06-18

作者简介: 侯振乾(1983—), 男, 河北人, 在读博士, 从事飞行器控制系统设计、参数不确定飞行器控制系统鲁棒稳定性及性能评估研究。

其中 $M_{11} \in C^{n_1 \times n_1}, M_{22} \in C^{n_2 \times n_2}, n = n_1 + n_2$ 。系统的输入和输出之间的关系可用上线性分式变换表示为:

$$y = F_u(M, \Delta)r = (M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12})r \quad (2)$$

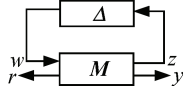


图 1 LFT 形式的参数不确定系统结构

式 (2) 所示系统的结构奇异值 μ 可用下式计算:

$$\mu_{\Delta}(M_{11}) = \frac{1}{\min_{\Delta \in C^{m \times m}} (\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - \Delta M_{11}) = 0)} \quad (3)$$

当使 $\det(I - \Delta M_{11}) = 0$ 的不确定性矩阵 Δ 不存在时, $\mu_{\Delta}(M_{11}) = 0$ 。由式 (3) 可知结构奇异值峰值表示系统保持稳定时, 所允许的不确定参数最大摄动范围。当 $\mu \leq 1$ 时, 系统保持稳定, 否则系统是不稳定的。由于难以计算 μ 的精确值, 只能给出其上下界。 μ 的上界峰值表示系统保持稳定时, 所允许的不确定参数最大摄动范围; μ 的下界峰值表示导致系统出现不稳定的不确定参数最小摄动范围。

由于 μ 计算中出现的问题, 考虑将不确定性矩阵中一部分参数固定在一定范围内变化, 计算不确定性矩阵中剩余部分参数变化多大时会导致系统不稳定, 这就是斜结构奇异值的思想^[10-11]。

给出不确定性矩阵集合 $X_K \subset C^{n_f \times n_f}$ 、 $X_{\hat{K}} \subset C^{n_v \times n_v}$, $n_f + n_v = n_1$, 定义扩展矩阵:

$$X_{K, \hat{K}} = \{\Delta = \text{block diag}(\Delta_f, \Delta_v) : \Delta_f \in BX_K, \Delta_v \in X_{\hat{K}}\} \quad (4)$$

其中 $BX_K = \{\Delta_f \in X_K : \bar{\sigma}(\Delta_f) \leq 1\}$ 。

定义 对于 $M_{11} \in C^{n_1 \times n_1}$, 以及不确定矩阵 $\Delta \in X_{K, \hat{K}}$, 斜结构奇异值 $\mu_{\Delta}^s(M_{11})$ 定义为

$$\mu_{\Delta}^s(M_{11}) = \frac{1}{\min_{\Delta \in X_{K, \hat{K}}} (\bar{\sigma}(\Delta_v) : \det(I - \Delta M_{11}) = 0)} \quad (5)$$

当使得 $\det(I - \Delta M_{11}) = 0$ 的不确定性矩阵 Δ 不存在时, $\mu_{\Delta}^s(M_{11}) = 0$ 。

$X_{K, \hat{K}} \subset C^{n_1 \times n_1}$ 中固定部分 Δ_f 以及可变部分 Δ_v 中, 都可以包含重复的实数标量、复数标量, 以及复数满矩阵。

2 参数不确定系统建模

当图 1 中系统引入反馈控制器 K 时, 系统如图 2。其中 T 通过下线性分式变换式得到:

$$T = F_l(M, K) = M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21} + M_{11} \quad (6)$$

基于 μ 的参数不确定控制系统的鲁棒稳定性评估问题, 需要计算 $T(s)$ 渐近稳定时的 $\mu_{\Delta}(T(s))$ 。

将 s 看作不确定性参数, $T(s)$ 可以表示为如下状态空间形式:

$$T(s) = C(sI_p - A)^{-1}B + D = F_u(\hat{T}, \frac{1}{s}I_p) \quad (7)$$

其中 \hat{T} 为常值矩阵:

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (8)$$

计算频率范围为 $\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$ 的系统结构奇异值 μ 。为计算方便, 引入 $\delta_{\omega} \in [-1, 1]$, $\omega_0 = (\bar{\omega} + \underline{\omega})/2$, $\alpha_{\omega} = (\bar{\omega} - \underline{\omega})/2$, 此时 $s = j(\omega_0 + \alpha_{\omega}\delta_{\omega})$ 。利用如下变换:

$$N = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{\omega}}{\omega_0}I_p & -\frac{1}{j\omega_0}I_p \\ \frac{\alpha_{\omega}}{\omega_0}I_p & \frac{1}{j\omega_0}I_p \end{bmatrix} \quad (9)$$

可以得到 $\frac{1}{s}I_p$ 的线性分式表示形式, 即

$\frac{1}{s}I_p = F_u(N, \delta_{\omega}I_p)$, 此时参数不确定系统如图 3 所示, 图中 “*” 表示星积。

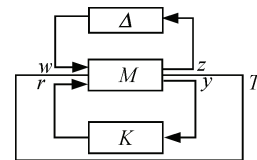


图 2 含不确定参数的反馈控制系统

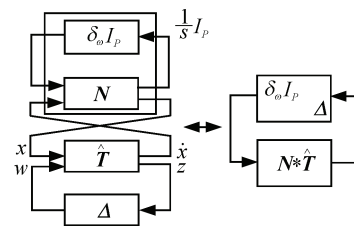


图 3 参数不确定系统的状态空间表示

当 $\delta_{\omega} \in [-1, 1]$ 时, 可以利用斜结构奇异值 $\mu_{\hat{K}}^s(N * \hat{T})$ 对参数不确定系统进行鲁棒稳定性评估。

3 斜结构奇异值的计算

笔者提出 2 种算法分别对实不确定参数斜结构奇异值的上下界进行计算^[12]。

3.1 斜结构奇异值上界

首先定义矩阵 S 如下:

$$S = \begin{bmatrix} I_f & 0 \\ 0 & \beta I_v \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中 I_f 、 I_v 与前述 Δ_f 、 Δ_v 的大小相同。令 M_s 定义如下：

$$M_s = \sqrt{S^{-1} M \sqrt{S^{-1}}} \quad (11)$$

其中，与 M 对应的不确定性矩阵如式 (4) 所示，则根据结构奇异值的定义，总是存在 1 个 β 使得 $\mu_\Delta(M_s)$ 的上界为 1，否则 $\mu_\Delta(M_s) = 0$ 。文献[10]证明了 β 是 $\mu_\Delta(M)$ 的上界。

利用线性矩阵不等式计算 β 。由前述可知 $\mu_\Delta(M_s) \leq 1$ ，因此

$$\bar{\sigma}(\sqrt{S^{-1} M \sqrt{S^{-1}}}) \leq 1 \quad (12)$$

根据结构奇异值性质，存在矩阵 D ，使得：

$$\bar{\sigma}(DM_s D^{-1}) \leq 1 \quad (13)$$

$$(DM_s D^{-1})^H (DM_s D^{-1}) \leq I \quad (14)$$

根据前面 S 定义，式 (14) 可以写为

$$(DMD^{-1}S^{-1})^H (DMD^{-1}S^{-1}) \leq I \quad (15)$$

由此得到：

$$M^H D^H D M \leq D^H D S^2 \quad (16)$$

令 $P = D^H D$ ，将 P 、 S 代入式 (16)，有：

$$M^H P M - \begin{bmatrix} I_f & \\ & \beta^2 I_v \end{bmatrix} P \leq 0 \quad (17)$$

令 $\beta^2 = \lambda$ ，由上式可得

$$M^H P M - \begin{bmatrix} I_f & \\ & 0 \end{bmatrix} P \leq \lambda \begin{bmatrix} 0 & \\ & I_v \end{bmatrix} P \quad (18)$$

计算斜结构奇异值上界的问题转换为广义特征值最小化问题，可求得斜结构奇异值上界为 $\beta = \sqrt{\lambda}$ 。

3.2 斜结构奇异值下界

关于实参数不确定系统的斜结构奇异值的下界，有以下定理。

定理^[13] 给定 1 个足够小的实数 $\varepsilon > 0$ ，对于 $M \in C^{n \times n}$ 以及与其相容的实数不确定矩阵 $\Delta \in X_{K, \hat{K}}$ ，则 $\mu_\Delta^s(M)$ 的下界可以由下式得到：

$$\mu_\Delta^s(M) = \frac{1}{\min_{\Delta} \{ \|\Delta_v\| : |\det(I - \Delta M)| \leq \varepsilon \}} \quad (19)$$

可以看到式 (19) 是一个约束最优化问题，可以通过优化算法求解。

笔者采用遗传算法进行优化。将

$$\frac{1}{\max \{d_{v1}, \dots, d_{vk}\}} + \alpha |\det(I - \Delta M)| \quad (20)$$

作为目标函数。其中 d_{v1}, \dots, d_{vk} 为允许变化的不确定参数， α 是 1 个很大的数，可以对 $|\det(I - \Delta M)|$ 进行约束。由此计算斜结构奇异值的下界。

4 实例

笔者利用前文提出的方法对含有实数型不确定参数的导弹控制系统进行鲁棒稳定性分析，并将分析结果与 Matlab 软件中 μ 分析函数得到的结果进行对比，以验证前文所提方法的有效性。

导弹线性模型的状态空间包表达式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^\alpha & Y^{\omega_z} & Y^\beta & Y^{\omega_y} & Y^{\omega_x} \\ M^\alpha & M^{\omega_z} & M^\beta & M^{\omega_y} & M^{\omega_x} \\ Z^\alpha & Z^{\omega_z} & Z^\beta & Z^{\omega_y} & Z^{\omega_x} \\ N^\alpha & N^{\omega_z} & N^\beta & N^{\omega_y} & N^{\omega_x} \\ L^\alpha & L^{\omega_z} & L^\beta & L^{\omega_y} & L^{\omega_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \omega_z \\ \beta \\ \omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y^{\delta_x} & Y^{\delta_y} & Y^{\delta_z} \\ M^{\delta_x} & M^{\delta_y} & M^{\delta_z} \\ Z^{\delta_x} & Z^{\delta_y} & Z^{\delta_z} \\ N^{\delta_x} & N^{\delta_y} & N^{\delta_z} \\ L^{\delta_x} & L^{\delta_y} & L^{\delta_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = Ax + Bu \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \omega_z \\ \beta \\ \omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} = Cx \quad (22)$$

其中 $\alpha, \omega_z, \beta, \omega_y, \omega_x$ 分别表示攻角、俯仰角速率、侧滑角、偏航角速率和滚转角速率。 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别表示滚转舵偏、偏航舵偏和俯仰舵偏。

不确定参数的标称值及其变化范围见表 1。

表 1 不确定参数标称值及其变化范围

不确定参数	标称值/(1/rad)	变化范围/%	最坏情况参数组合/(1/rad)
$C_m^{\delta_z}$	-0.006 4	[-10,10]	-0.007 04
$C_n^{\delta_y}$	-0.008 5	[-10,10]	-0.009 35
$C_l^{\delta_x}$	-0.002 7	[-10,10]	-0.002 97

导弹俯仰通道控制系统如图 4 所示。

导弹偏航通道控制系统与俯仰通道结构相同，滚转通道控制系统如图 5 所示。

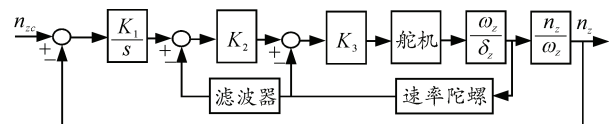


图 4 导弹俯仰通道控制系统结构

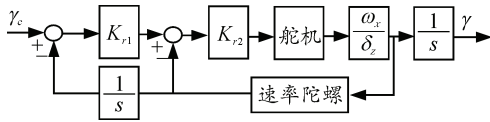


图 5 导弹滚转通道控制系统结构

在飞行高度 4 000 m, 飞行速度 2 Ma 的特征点对导弹控制系统鲁棒稳定性进行评估。此时式 (21) 中的矩阵 **A**、**B** 分别为:

$$A = \begin{bmatrix} -0.80 & 1 & -0.10 & 0 & 0 \\ -142 & 0.40 & 1.30 & -0.10 & -0.02 \\ 0.10 & 0 & -0.30 & 1 & 0 \\ 0 & 0.10 & -150 & -0.20 & 0 \\ 0 & 0.01 & -1200 & 0 & -2.56 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.001 & -0.07 \\ -7.16 & 5.06 & 29\ 730 * C_m^{\delta_z} \\ -0.01 & -0.08 & 0 \\ -21.50 & 29\ 290 * C_n^{\delta_y} & 0 \\ 571\ 420 * C_l^{\delta_x} & -572 & 0 \end{bmatrix}$$

将系统频率看作不确定参数, 根据式 (6)~式 (9) 构建参数不确定导弹的 LFT 模型。根据第 3 节给出的计算方法, 对导弹控制系统的斜结构奇异值上下界进行计算。

图 6 分别给出了利用文中所提方法计算的斜结构奇异值上下界以及利用 Matlab 工具箱得到的结构奇异值曲线。可以看到, 用 Matlab 工具箱计算时没有得到结构奇异值的下界。

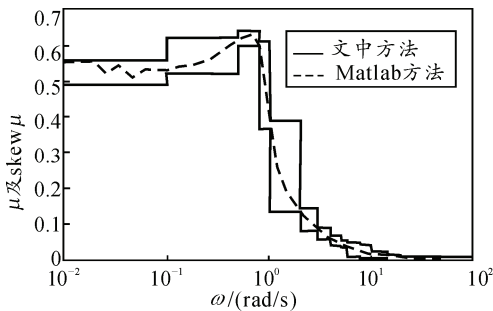


图 6 参数不确定导弹的鲁棒稳定性

表 2 2 种计算结果的对比

方法	最大值	频率/Hz
μ UB	0.63	0.71
μ LB	—	—
Skew μ UB	0.64	[0.5, 0.8]
Skew μ LB	0.59	0.68

表 2 给出了 2 种方法得到的系统鲁棒稳定性上下界峰值及其对应的频率。可以看到 2 种方法得到的奇异值上界相差不大, 但基于 Skew μ 的方法可以得到系统鲁棒稳定性下界。由结果可知, 不确定参数的摄动范围可以是当前值的 1/0.64~1.56 倍, 系统仍保持稳定。当不确定参数的摄动范围达到当前值的 1/0.59~1.69 倍时, 系统会出现不稳定, 此时的不确定参数组合见表 1。

5 结论

由计算结果可以看到: 文中提出的方法可以得到斜结构奇异值的下界, 由此可以获得最坏情况时不确定参数组合, 并且在不影响重要信息获取的同时, 大大降低了计算量, 是一种高效且准确的鲁棒稳定性评估方法, 适于工程应用。

参考文献:

- [1] Doyle J. C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties[J]. IEE Proc., 1982, 129(6): 242-250.
- [2] Tadasuke Matsuda, Michihiro Kawanishi, Tatsuo Narikiyo. Computation of Real Structured Singular Value by Stability Feeler[C]. Proceedings of the 7th Asian Control Conference, Hong Kong, China, 2009: 672-677.
- [3] Liu Jiabin, Zhou Kemin, Ma Lei. On the Robust Stability Analysis with Real Block Structured Uncertainties[C]. 2013 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA), Hangzhou, China, 2013: 16-20.
- [4] Jorge E. Tierno, Peter M. Young. An Improved μ Lower Bound via Adaptive Power Iteration[C]. Proceedings of the 31st Conference on decision and control, Tucson, Arizona, 1992: 3181-3186.
- [5] Packard A. Continuity properties of the real/complex structured singular value[C]. Proceedings of the 7th Asian Control Conference, Honolulu, Hawaii, 1993:415-428.
- [6] Iordanov P. I. Robust analysis and synthesis of systems subject to parameter uncertainty using the structured singular value[D]. Limerick: PhD Thesis, University of Limerick, 2003: 20-62.
- [7] Dimitry Gorinevsky, Gunter Stein. Structured Uncertainty Analysis of Robust Stability for Multidimensional Array Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(9): 653-680.
- [8] Harald Pfifer, Simon Hecker. Generation of Optimal Linear Parametric Models for LFT-Based Robust Stability Analysis and Control Design[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 19(1): 118-131.
- [9] Halton M. K. New structured singular value based robustness analysis tools with automotive applications[D]. Limerick: PhD Thesis, University of Limerick, 2004: 10-90.
- [10] Ferreres G. A practical approach to robustness analysis with aeronautical applications[M]. New York: Klumer Academic, 1999: 95-118.
- [11] Ferreres G., Biannic J. M., Magni J. F. A Skew μ Toolbox (SMT) for robustness analysis[C]. 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan, 2004: 309-314.
- [12] Rod Holland, Peter Young. A Skew μ Lower Bound[C]. Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, AK, 2002: 2753-2758.
- [13] Mark Halton, Martin J. Hayes, Petar Iordanov. State-space μ -analysis for an experimental drive-by-wire vehicle[C]. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference, Seville, Spain, 2005: 7912-7917.