

doi: 10.7690/bgzdh.2013.12.002

# 一种多约束条件下的最优末制导律研究

孙阳平<sup>1,2</sup>, 林王鹏<sup>2</sup>, 范作娥<sup>3</sup>, 周静<sup>4</sup>

(1. 海军航空工程学院研究生管理大队, 山东 烟台 264001; 2. 中国人民解放军 91640 部队, 广东 湛江 524064; 3. 海军潜艇学院战略导弹与水中兵器系, 山东 青岛 266071; 4. 中国人民解放军 92474 部队, 海南 三亚 572000)

**摘要:** 为了更好地满足现代导弹武器多约束、高精度制导的基本要求, 提出一种新的最优末制导律。在综合考虑落角和末端攻角的要求下, 用二次型最优控制推导出新的制导律, 并给出了零阶无时延系统的表达式, 最后运用典型弹道仿真和对比试验验证了该制导律的良好的弹道性能。仿真结果表明: 该制导律不但能够满足多约束高精度制导的要求, 而且对落角、末端攻角控制和早期弹道修正具有较大的优势。

**关键词:** 落角约束; 末端攻角约束; 制导律; 最优控制

**中图分类号:** TJ765.3 **文献标志码:** A

## Study on Optimal Guidance Law Under Multiple-Constrained Condition

Sun Yangping<sup>1,2</sup>, Lin Wangpeng<sup>2</sup>, Fan Zuoe<sup>3</sup>, Zhou Jing<sup>4</sup>

(1. Administrant Brigade of Postgraduate, Naval Aeronautical & Astronautical University, Yantai 264001, China;

2. No. 91640 Unit of PLA, Zhanjiang 524064, China;

3. Department of Strategic Missile & Underwater Weapon, Submarine Academy of PLA Navy, Qingdao 266071, China;

4. No. 92474 Unit of PLA, Sanya 572000, China)

**Abstract:** In order to meet the requirements of multiple constrain conditions and high-precision guidance of the missile, the article put forwards a new optimal guidance law. Considering the conditions under the constraints with the impact angle and the angle of attack, the new guidance law was deduced by the quadratic optimal control, and approximate expression of zero-order lag-free system was given. At last, use typical trajectory simulation and comparison test to verify great trajectory performance of guidance law. The verified result shows that the optimal guidance laws with the impact angle and the angle of attack constraint is satisfied with the precision guidance in the multi-constraint conditions, and have more predominance of acceleration control in terminal phase and trajectory compensation in early phase.

**Key words:** constraint of impact angle; constraint of terminal angle of attack; guidance law; optimal control

### 0 引言

随着飞行器性能的提升, 除了对命中率的要求外, 对飞行器飞行姿态和其他要素的控制要求将进一步提高, 国内外学者对此进行了很多相关的研究, 并取得了不少的成果<sup>[1-5]</sup>。文献[4]利用最优控制理论研究了一类有终端角度控制和终端攻角控制的制导律, 但是对于导弹末端攻击时刻的攻角, 该方法无法实现零攻角攻击; 文献[5]在研究攻角约束时考虑导弹本身的动态性能, 所求得的制导律能够精确地对导弹末端攻角进行控制, 但是该模型建立的三阶矩阵在求解制导律上计算较为复杂。

综合文献[4]和文献[5]的模型, 笔者研究带落角和攻角约束问题, 将导弹一阶动态性能引入到模型中, 建立一个三阶矩阵的模型, 运用线性系统最优控制的微分矩阵 Riccati 方程推导出一种新的制导律, 并用典型弹道仿真验证了该制导律的可行性和弹道性能。通过和文献[4]中的制导律进行对比仿真

结果表明: 文中的制导律不但满足高精度制导的要求, 而且对末端攻角有良好的控制并最终实现零攻角攻击, 有效提高了导弹攻击的毁伤效果。

### 1 导引模型

末制导示意图如图 1 所示。将导弹和目标都看成是垂直平面内的质点, 假设目标是静止的, 末端攻击过程中导弹飞行速度恒定, 加速度指令垂直于导弹的速度方向。

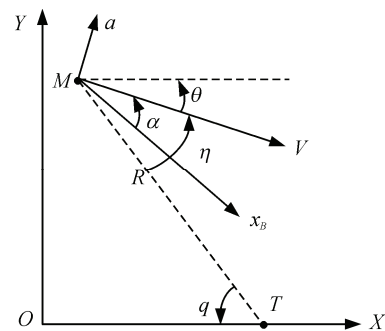


图 1 垂直平面内末制导几何关系

收稿日期: 2013-07-23; 修回日期: 2013-08-29

基金项目: 国家自然科学基金(61273058); 海军航空工程学院研究生创新基金资助

作者简介: 孙阳平(1984—), 男, 湖南人, 在读硕士, 工程师, 从事导航、制导与控制研究。

在图1中,  $MT$ 是当前时刻的弹目连线;  $V$ 为导弹飞行速度;  $\theta$ 为弹道倾角;  $q$ 为弹目视线角;  $\eta$ 为前置角;  $\alpha$ 为攻角;  $R$ 为弹目距离, 定义 $\theta < 0$ 。

由相互之间的角度关系式可以看出:

$$\eta = \theta + q \quad (1)$$

由图1所建立的弹目运动方程为:

$$\begin{cases} \dot{R} = -V \cos \eta \\ R\dot{q} = V \sin \eta \end{cases} \quad (2)$$

将式(2)中的第2式求导可以得到:

$$\ddot{q} = \left( \frac{\dot{V}}{V} - \frac{2\dot{R}}{R} \right) \dot{q} - \frac{\dot{R}}{R} \dot{\theta} \quad (3)$$

在文中选取剩余时间 $t_{go}$ 为:

$$t_{go} = \frac{R}{V} \quad (4)$$

其中:  $R$ 为弹目距离;  $V$ 为导弹的飞行速度, 因为在导弹末段飞行中 $\eta$ 一般较小, 为了简化模型, 设定 $\dot{R} = -V$ 。根据导弹飞行速度恒定, 可以设定 $\dot{V} = 0$ 。

根据假设可以化解式(3)为:

$$\ddot{q} = \frac{2\dot{q}}{t_{go}} + \frac{\dot{\theta}}{t_{go}} \quad (5)$$

由空气动力学原理<sup>[6-7]</sup>可知:

$$F = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^\alpha \alpha \quad (6)$$

式中:  $F$ 为导弹在飞行过程中收到的气动力;  $\frac{1}{2} \rho v^2$ 为导弹动压;  $S$ 为导弹参考面积;  $C_y^\alpha$ 为升力系数。利用式(6)可建立攻角和导弹加速度之间的等效关系, 将末端攻角为零的问题转化为末端加速度为零的问题。

假设弹体动态特性可近似等效为一阶惯性环节, 因此有:

$$a(s) = \frac{1}{1 + \tau s} a_c(s) \quad (7)$$

$$u(t) = -R^{-1} [M \Phi(t_f, t) B]^T \Gamma_z^T \left[ I + \int_t^{t_f} \Gamma_z [M \Phi(t_f, \tau) B] R^{-1} [M \Phi(t_f, \tau) B]^T \Gamma_z^T d\tau \right]^{-1} \Gamma_z [\Phi(t_f, t) x(t) - x_f] \quad (13)$$

定义:

$$S = \Gamma^T \Gamma \quad \Gamma = \Gamma_z M$$

$$M = [m_{ij}]; m_{ij} \in [0, 1]$$

$$G = M \Phi(t_f, t) B$$

$$\Lambda(t_f - t) = -R^{-1} [\Gamma_z G]^T \left\{ I + \int_t^{t_f} [\Gamma_z G] R^{-1} [\Gamma_z G]^T d\tau \right\}^{-1} \Gamma_z$$

$$ZEM = M \Phi(t_f, t) x(t) - M x_f$$

其中:  $\tau$ 为时间常数;  $a_c$ 为指令加速度;  $a$ 为导弹法向加速度。

对式(7)进行拉氏反变换可得到:

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{\tau} (a_c(t) - a(t)) \quad (8)$$

由于导弹加速度垂直于速度方向, 由此有:

$$\dot{\theta} = \frac{a}{V} \quad (9)$$

由式(9)和假设条件 $\dot{R} = -V$ , 式(5)可以变化为:

$$\ddot{q} = \frac{2\dot{q}}{t_{go}} + \frac{a}{R} \quad (10)$$

设导弹末端要求实现的落角为 $\theta_f$ , 令 $x_1 = q - \theta_f$ ,  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{q}$ ,  $x_3 = a$ 作为系统的状态变量,  $u = a_c$ 为控制量, 根据式(8)和式(10)可得系统的状态方程为:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (11)$$

其中:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t_{go}} & \frac{1}{R} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$$

## 2 制导律设计

为了在终端获得良好的制导性能, 综合考虑脱靶量和控制能量作为优化指标:

$$J = \frac{1}{2} [[x(t_f) - x_f]^T S [x(t_f) - x_f] + \int_t^{t_f} u^T(t) R u(t) dt] \quad (12)$$

其中:  $S = S^T \geq 0$ 为常值终端加权矩阵;  $R = R^T \geq 0$ 为控制加权矩阵;  $t_f, x_f$ 分别为飞行结束时间和指定的终端约束。由参考文献[8-9], 可以得到:

式(13)可以化简为:

$$a_c = u(t) = \Lambda(t_f - t) \bullet ZEM \quad (14)$$

为了同时满足落点、落角和末端攻角的要求, 设定约束条件为:

$$\begin{cases} q(t_f) = \theta_f \\ \dot{q}(t_f) = 0 \\ a(t_f) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

加权矩阵 $S$ 和 $R$ 分别取为:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_q & 0 & 0 \\ 0 & s_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & 0 & s_a \end{pmatrix}, \mathbf{R} = 1 \quad (16)$$

由式 (13) 及  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{R}$  的取值可以得到:

$$\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} = \text{diag}(s_q \quad s_{\dot{q}} \quad s_a) \quad (17)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_z = \begin{pmatrix} \sqrt{s_q} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{s_{\dot{q}}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{s_a} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

对式 (11) 中的系数矩阵进行拉氏变换可得:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} L^{-1} \left\{ \frac{1}{Rs(s-2/t_{go})} \frac{a(s)}{a_c(s)} \right\}_{t_f-t} \\ L^{-1} \left\{ \frac{1}{R(s-2/t_{go})} \frac{a(s)}{a_c(s)} \right\}_{t_f-t} \\ L^{-1} \left\{ \frac{a(s)}{a_c(s)} \right\}_{t_f-t} \end{pmatrix} \quad (20)$$

联立式 (18) 和式 (20) 可以得到:

$$\mathbf{\Gamma}_z \mathbf{G} = (\sqrt{s_q} \phi_1 \quad \sqrt{s_{\dot{q}}} \phi_2 \quad \sqrt{s_a} \phi_3) \quad (21)$$

其中:

$$\phi_1 = L^{-1} \left\{ \frac{1}{Rs(s-2/t_{go})} \frac{a(s)}{a_c(s)} \right\}_{t_f-t}$$

$$\phi_2 = L^{-1} \left\{ \frac{1}{R(s-2/t_{go})} \frac{a(s)}{a_c(s)} \right\}_{t_f-t}$$

$$\phi_3 = L^{-1} \left\{ \frac{a(s)}{a_c(s)} \right\}_{t_f-t}$$

由式 (13) 和式 (20) 可以得到:

$$\mathbf{\Lambda}(t_f-t) = - \begin{pmatrix} \phi_1 \sqrt{s_q} \\ \phi_2 \sqrt{s_{\dot{q}}} \\ \phi_3 \sqrt{s_a} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1+\varphi_{11} s_q & \varphi_{12} \sqrt{s_q s_{\dot{q}}} & \varphi_{13} \sqrt{s_q s_a} \\ \varphi_{21} \sqrt{s_q s_{\dot{q}}} & 1+\varphi_{22} s_{\dot{q}} & \varphi_{23} \sqrt{s_{\dot{q}} s_a} \\ \varphi_{31} \sqrt{s_q s_a} & \varphi_{32} \sqrt{s_{\dot{q}} s_a} & 1+\varphi_{33} s_a \end{pmatrix}^{-1} \quad (22)$$

其中:

$$\varphi_{11} = \int_t^{t_f} \phi_1^2 d\tau \quad \varphi_{22} = \int_t^{t_f} \phi_2^2 d\tau \quad \varphi_{33} = \int_t^{t_f} \phi_3^2 d\tau$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = \int_t^{t_f} \phi_1 \phi_2 d\tau \quad \varphi_{13} = \varphi_{31} = \int_t^{t_f} \phi_1 \phi_3 d\tau \quad \varphi_{23} = \varphi_{32} = \int_t^{t_f} \phi_2 \phi_3 d\tau$$

计算式 (11) 中的状态转移矩阵  $\Phi(t_f, t)$  为:

$$\Phi(t_f, t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t_{go}}{2} (e^{\frac{2-t}{t_{go}}} - 1) - \frac{\tau t_{go}}{2r} + \frac{\tau^2 t_{go}^2}{2r(2\tau + T_g)} \left( \frac{1}{\tau} e^{\frac{2-t}{t_{go}}} + \frac{2}{t_{go}} e^{\frac{t}{\tau}} \right) & & \\ 0 & e^{\frac{2-t}{t_{go}}} & \frac{\tau t_{go}}{r(2\tau + t_{go})} (e^{\frac{2-t}{t_{go}}} - e^{\frac{t}{\tau}}) \\ 0 & 0 & e^{\frac{t}{\tau}} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{ZEM} = \begin{pmatrix} q + \frac{t_{go}}{2} (e^{\frac{2-t}{t_{go}}} - 1) \dot{q} + \left( -\frac{\tau t_{go}}{2r} + \frac{\tau^2 t_{go}^2}{2r(2\tau + t_{go})} \left( \frac{1}{\tau} e^{\frac{2-t}{t_{go}}} + \frac{2}{t_{go}} e^{\frac{t}{\tau}} \right) \right) a \\ e^{\frac{2-t}{t_{go}}} q + \frac{\tau t_{go}}{r(\tau + t_{go})} (e^{\frac{2-t}{t_{go}}} - e^{\frac{t}{\tau}}) a \\ e^{\frac{t}{\tau}} a \end{pmatrix} \quad (24)$$

由式 (13)、式 (23) 可以得到:

根据式 (13)、式 (22) 和式 (24) 即可得到考虑一阶动态特性条件下的制导律的通解。为了简化该解, 假设当  $\tau \rightarrow 0$  时, 即系统为零阶无延迟系统, 则有  $\frac{a(s)}{a_c(s)} = 1$ , 令  $s_q \rightarrow \infty$ ,  $s_{\dot{q}} \rightarrow \infty$ ,  $s_a \rightarrow \infty$ , 可得到:

$$a_c = -6V\dot{q} - \frac{6V}{t_{go}}(q - \theta_f) \quad (23)$$

从组成来看, 该制导律由比例导引项加偏置的约束项组成, 只要导弹的速度、初始位置和初始弹道倾角已知, 即可设计出末端飞行的弹道, 在工程实现上较为简单。

文献[4]中的制导律如下:

$$a'_c = -4.508V\dot{q} - 6.383 \frac{V}{t_{go}}(q - \theta_f) \quad (24)$$

从形式上看, 笔者求出的制导律和文献[4]中的制导律形式基本相同, 区别在于各项选取的系数不同。下面通过仿真来比较这 2 种制导律的优劣。

### 3 仿真实验

#### 1) 仿真分析 1。

为了更好地验证文中推导出的制导律, 采用文献[4]中的仿真条件, 假设导弹的初始位置为(0 m, 10 000 m), 目标的位置为(12 000 m, 0 m), 导弹的初始弹道倾角为 $-30^\circ$ , 飞行速度为 400 m/s。文中制导律和文献[4]的制导律仿真对比结果如图 2~图 4。

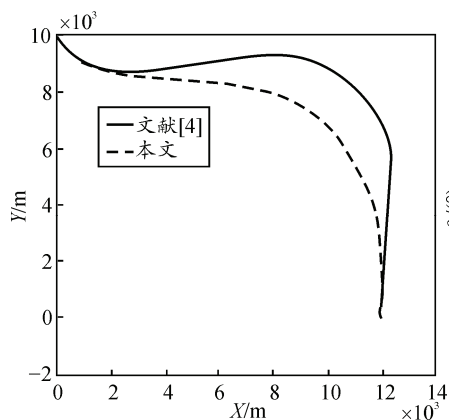


图2 导弹轨迹

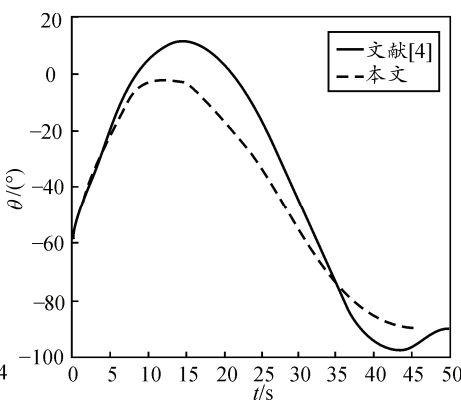


图3 弹道倾角

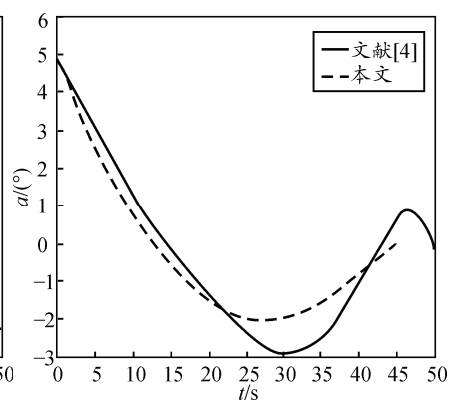


图4 攻角

从以上的仿真结果来看，虽然文献[4]和文中的制导律均能够满足脱靶量和落角的要求，但从图2中可以看出，文中推导的制导律相对于文献[4]的制导律，弹道更为平滑，更容易实现。从图4可以看出，文献[4]的制导律在末端攻击时刻存在有攻角，文中的制导律在末端完全实现零攻角攻击，更为有效地提高了导弹的毁伤效能。

2) 仿真分析 2。

为了更好地验证文中制导律的通用性，在仿真1其他条件相同的前提下，选取落角分别为0°, 30°, 60°, 90°，仿真对比结果如图5~图7所示。

通过仿真结果可以看出：笔者求出的制导律能够满足不同要求的落角和末端攻角的约束条件，有较强的通用性，具有较好的工程应用性。

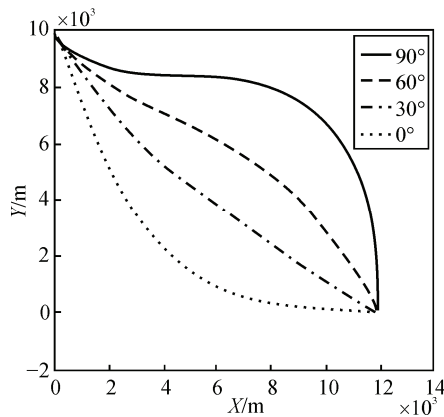


图5 导弹轨迹

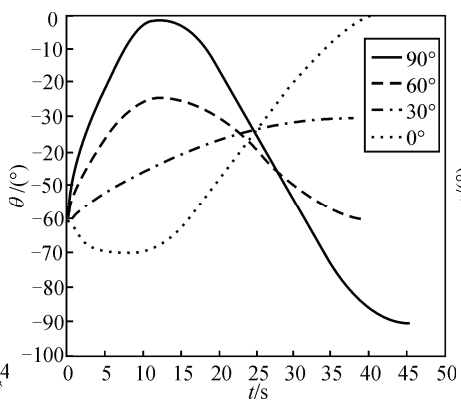


图6 弹道倾角

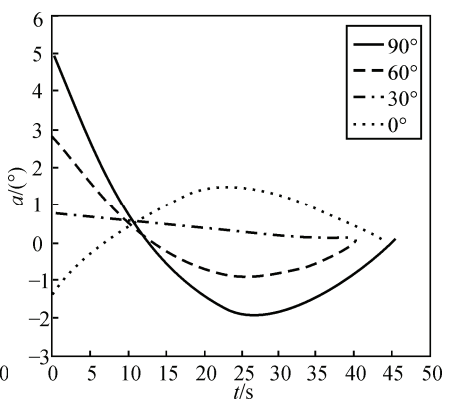


图7 攻角

4 结论

笔者以最优控制为基础，综合考虑脱靶量、落角和末端攻角等约束条件，推导出一种新的制导律，只需要在线测量导弹的速度、初始位置和初始弹道倾角即可。仿真结果可以看出：该制导律能够满足脱靶量、落角和末端攻角等约束指标，且具有比较稳定的弹道。

参考文献：

[1] Kim M, Grider K V. Terminal guidance for impact attitude angle constrained flight trajectories[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1973, AES29(6): 852-859.  
 [2] Xing Qiang, Chen Wanchun. Segmented Optimal Guidance with Constraints on Terminal Angle of Attack and Impact Angle[J]. 50<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace

Exposition, AIAA 2012-0257: 1-10.  
 [3] 张友安, 马培蓓. 带有攻击角度和攻击时间控制的三维制导[J]. 航空学报, 2008, 29(4): 1020-1026.  
 [4] 孙未蒙. 空地制导武器多约束条件下的制导律设计[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2008: 12.  
 [5] 秦元岗. 带末端多约束的航空侵彻炸弹制导律研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2010, 03.  
 [6] 钱杏芳, 林瑞雄, 赵亚男. 导弹飞行力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2000: 5-10.  
 [7] 谢燕武. 飞航导弹一体化制导控制系统[J]. 兵工自动化, 2012, 31(11): 38-40.  
 [8] Ilan Rusnak, Haim Weiss, Rei Eliav. Missile Guidance with Constrained Terminal Body Angle[J]. 2010 IEEE 26<sup>th</sup> convention of electrical and electronics engineers in Israel. IEEE 2010: 0000045-0000049.  
 [9] Yong-In Lee, Chang-Kyung Ryoo, Eulgon Ki m. Optimal Guidance with Constraints on Impact Angle and Terminal Acceleration[J]. AIAA 2003-5795: 1-7.