

doi: 10.7690/bgzd.2013.09.013

基于拟平稳分布的随机服务系统 k 阶繁忙期研究

王振纬, 程燕

(陆军军官学院基础部数学教研室, 合肥 230031)

摘要: 为深入研究随机服务系统的“繁忙期”, 基于拟平稳分布对其进行探讨。利用生灭过程的拟平稳分布概率特性, 得到某个确定初始状态下生灭过程的平均灭绝时间, 依据它和随机服务系统平均 k 阶繁忙期概率分布的相似, 得到结果, 并以实例进行模拟验证。结果表明: 该模型进一步拓展了拟平稳分布的应用空间, 能为深入研究随机服务系统的“繁忙期”提供参考。

关键词: 生灭过程; 拟平稳分布; 平均灭绝时间; k 阶繁忙期

中图分类号: TJ02 **文献标志码:** A

Analysis of k Order Busy Period in Stochastic Service System Based on Quasi-Stationary Distribution

Wang Zhenwei, Cheng Yan

(Staff Room of Math, Department of Basic Theories, Army Officer Academy of PLA, Hefei 230031, China)

Abstract: For further researching of “busy period” of random service system, discuss it based on quasi-stationary distribution. Use quasi-stationary distribution probability features of birth-death process to acquire mean extinction time of birth-death process under certain initialization state, acquire results according to its similarity with mean k order busy period probability distribution of random service system. Then, carry out simulation verifying by using example. The results show that the model can further expand application fields for quasi-stationary distribution, and provide reference for further researching on “busy period” of random service system.

Key words: birth-death process; quasi-stationary distribution; mean extinction time; k order busy period

0 引言

在经典的随机服务系统中,“繁忙期”是指系统由空(没有顾客)变为不空时起,一直到系统又变为空时为止的时间。目前虽然对于随机服务系统的探讨较为完善,但对于“繁忙期”的研究并不深入,只有孙荣恒、徐光辉等人利用概率母函数做了一些工作^[1-2]。而拟平稳分布是在一个吸收时间子系统内能达到类似于“平稳性”的一种概率分布,和“繁忙期”的概率分布非常相似。国内对于拟平稳分布的研究并不常见,只是就它的某个分支进行了探讨。利用拟平稳分布的基本内涵,笔者研究了随机服务系统的平均 k 阶繁忙期,给出求解方法,并通过实例进行验证。

1 基本概念

定义 1 当 $m = (m_i; i \in E_1)$ 是 $\bar{X}(t)$ 的初始分布,对于 $t \geq 0$, 有

$$P_m(\bar{X}(t) = i | T > t) = m_i, i \in E_1 \quad (1)$$

此时, $m = (m_i; i \in E_1)$ 称作拟平稳分布。

定义 2^[1] 从系统中有 k 个顾客在等待服务(不

包含正在服务的顾客)时,一直到有一个服务台空闲时为止,这段时间称为系统的 k 阶繁忙期,记为 A_k 。零阶繁忙期为 A_0 , 简称为繁忙期。

由拟平稳分布定义可看出,拟平稳分布和平稳分布的概率特性非常相似,当 Markov 过程在未被吸收前,它的初始分布是拟平稳分布时,它在任一时刻处在暂留集上的状态 i 的概率相等。而繁忙期特指从系统中所有服务台都进入服务时起,一直到有一个服务台空闲时为止的一段时间。若以随机服务系统 $M/M/1$ 中的 k 阶繁忙期解释具有吸收态的生灭 $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$, 它就是过程从状态“ k ”到“ 0 ”的时间,即生灭过程 $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$ 由初始状态 k 到被吸收的时间。

2 平均灭绝时间

设 $\bar{X}(t)$ 首达 $E_0 = \{0\}$ 的时刻为 T , 令 $T = \inf\{t \geq 0 | \bar{X}(t) = 0\}$ 表示灭绝时间,它是一个依赖于初始分布的随机变量。如果初始分布为拟平稳分布,灭绝时间记为 T_0 ; 若 $\bar{X}(0) = i$, 灭绝时间记为 T_i 。

收稿日期: 2013-04-03; 修回日期: 2013-05-16

作者简介: 王振纬(1979—), 女, 河北人, 硕士, 讲师, 从事应用概率统计研究。

所以，当过程的初始状态为“ i ”，灭绝前所经历的平均灭绝时间为 ET_i 。考虑借助于拟平稳分布来研究平均灭绝时间，不加证明地给出以下 3 个引理^[3]：

引理 1 拟平稳分布 $m = (m_1, m_2, \dots, m_N)$ 满足以下关系式：

$$m_n = \pi_n \sum_{k=1}^n \frac{1 - \sum_{j=0}^{k-1} m_j}{\rho_k} m_1, n = 1, 2, \dots, N, \sum_{k=1}^N m_k = 1, m_0 = 0 \quad (2)$$

此结论具有一般性，对通常情况下的拟平稳分布都可以利用它求解。

引理 2 $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$ 的拟平稳分布是以 0 为反射壁的平稳分布，所以满足平衡方程

$$m_i \mu_i = m_{i-1} \lambda_{i-1}, \quad i \in E_1 \quad (3)$$

引理 3 在 $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$ 中，若初始分布是拟平稳分布，则灭绝时间

$$ET_Q = \frac{1}{\mu_1 m_1} \quad (4)$$

由上述引理可得下述结论：

定理 1 当初始状态为“ i ”，设 $r \in E_1$ 是任意固定状态，则

$$ET_i = \frac{1}{\mu_1 m_1} \sum_{r=1}^i m_r \quad (5)$$

证明：由引理 2 可知， $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$ 的拟平稳分布是以 0 为反射壁的平稳分布。所以当过程在状态 1 时发生死亡，记作过程完成了 1 个周期。由于新过程是遍历的，当 $t \rightarrow \infty$ 时，过程无穷次回到状态 r 。定义 ES_r 为在一个周期内，过程停留在状态 r 的平均时间，即 ES_r 为原过程 $\bar{X}(t)$ 在吸收发生前停留在状态 r 的平均时间。

设 S_{rj} 为新过程在第 j 个周期停留在状态 r 的时间， $j=1, 2, \dots$ 。由拟平稳分布定义及强大数定律，有

$$m_r = \frac{p_r}{\sum_{j=1}^n p_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n S_{rj}}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n S_{ij}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_{rj}}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n S_{ij}} = \frac{ES_r}{E\{\sum_{i=1}^n S_i\}}$$

因为 $T = \inf\{t > 0; X(t) = 0\}$ ，而 ES_r 为原过程 $\bar{X}(t)$ 在吸收发生前停留在状态 r 的平均时间，所以

$E\{\sum_{i=1}^n S_i\} = ET_Q$ ，即 $ES_r = m_r ET_Q$ 。当初始分布为状态

“ i ”，又由于引理 3 可知，整个过程的平均灭绝时间 $ET_i = \sum_{r=1}^i m_r E[T_Q] = \frac{1}{\mu_1 m_1} \sum_{r=1}^i m_r$ 。

由此，结论可证。

其中，式 (5) 中的 m_r 可以借助于引理 1 的结果，直接求解得到平均灭绝时间 ET_i 。

3 平均繁忙期

定理 2 设 A_k 是 $M/M/1/N$ 的平均 k 阶繁忙期长度，那么

$$EA_k = E[T] \sum_{n=1}^N n m_n \quad (6)$$

其中 $m_k = \pi_k \sum_{i=1}^n \frac{1 - \sum_{j=0}^{i-1} m_j}{\rho_i} m_1, i = 1, 2, \dots, N, \sum_{k=1}^N m_k = 1, m_0 = 0$ 。

证明：造新的生灭过程 $\tilde{N}(t)$ 。与一般的输入过程 $N(t)$ 相比，新过程只要转移到 0 后就停止，显然 0 是吸收态。 $\tilde{N}(t)$ 由 0 变成 1 忙期开始，第 1 次变回 0 忙期结束。令忙期长度为 b ，则

$$B(t) = P\{b \leq t\} = P\{\tilde{N}(t) = 0\}$$

由定义 2 可知，随机服务系统中的 k 阶繁忙期就是具有吸收态“0”的过程 $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$ 从状态“ k ”到“0”的时间，即过程由初始状态“ k ”开始直到被吸收的时间，这和平均灭绝时间 ET_k 的含义相吻合，所以可利用平均灭绝时间来研究“繁忙期”，即随机服务系统的 k 阶繁忙期就是生灭过程当初始状态为“ k ”，所经历的平均灭绝时间 ET_k 。结论可证。

拟平稳分布的结果可以由式 (2) 的 k 阶繁忙期 A_k 得到。下面通过一个具体的实例来求解 $M/M/1/N$ 的平均 k 阶繁忙期 EA_k 。

4 实例

设敌坦克对我某防御阵地实施突袭，突袭强度为 $\lambda=1.2$ 辆/min，且服从泊松分布。我方有 2 套反坦克防御系统，2 套装置单独作战，互不干扰，由此构成 2 个 $M/M/1$ 等待制随机服务系统，在各自的辖区内按顺序实施射击^[9]。套反坦克防御系统对某个目标的平均射击时间分别为 4/3、5/3 min，且射击服从负指数分布，假定目标通过目标区需要 5 min，共有 6 辆敌坦克进入我防御阵地受到射击，同时不考虑敌方还击。其中 $N=12$ 。

在第 1 套反坦克防御系统中 $\rho_k = (\frac{9}{10})^{k-1}$ ， $\pi_n = (\frac{9}{10})^{n-1}$ ；第 2 套反坦克防御系统中 $\rho_k = (\frac{18}{25})^{k-1}$ ， $\pi_n = (\frac{18}{25})^{n-1}$ ；并且 $k=6$ 。由式 (6) 通过计算机模拟可

以求得, 在第 1 套反坦克防御系统中, $EA_6=12.33$; 第 2 套反坦克防御系统中, $EA_6=4.377$ 。显然这样的结果是合理的, 因为第 2 套反坦克防御系统死亡率与生长率的比值明显大于第 1 套反坦克防御系统的比值, 所以相应的 6 阶繁忙期也更小, 也就是说, 在第 2 套反坦克防御系统中, 6 辆坦克在进入我防御阵地后, 从等待被射击时起一直到我方射击完毕的这段时间更短。

5 结束语

该模型不再局限于使用概率母函数这一特定方法, 进一步拓展了拟平稳分布的应用空间, 为深入研究随机服务系统的“繁忙期”提供了一定的思路。笔者仅对最基本的 $M/M/1$ 系统进行了研究, 如何将拟平稳分布应用于更复杂的随机服务系统的繁忙期, 则是今后研究的方向。

参考文献:

[1] 孙荣恒. $M/M/1$ 排队系统的忙期[J]. 重庆大学学报,

(上接第 43 页)

图 6 显示了药柱各区域缩孔和缩松所占的体积百分比。从图 6 可以清晰地看出缩孔和缩松所处的位置, 即缩孔和缩松分布在装药中轴线上, 靠近自由面, 缩孔和缩松本身是不均匀的, 内部是缩孔, 外部是缩松。



图 6 装药内部缺陷的计算结果

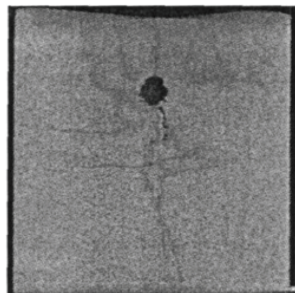


图 7 炸药内部缺陷的 CT 检测结果

图 7 是文献[3]给出的 RHT 炸药凝固后的 CT 扫描照片, 显示了缩孔和缩松的位置。根据图 7, 装药内部缩松和缩孔中心到药柱底面中心约 78 cm, 而根据图 6, 仿真计算得到的缩孔和缩松中心到药

2003(2): 151-155.
 [2] 孙荣恒. 随机过程及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 62-70.
 [3] Van Doorn E. A., Pollett P. K. Quasi-Stationary Distributions for Reducible Absorbing Markov Chains in Discrete Time[J]. Markov Processes Relat. Fields, 2009, 15(1): 191-204.
 [4] Li Wenlong, Jiang Yiwen, Yao Nan. Estimate of Extinct Time and Cost the stochastic Epidemic Modle[J]. Journal of Mathematics, 2007(2): 181-187.
 [5] 孙荣恒, 李建. 排队论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 34-39.
 [6] Van Doorn E. A., Pollett P. K. Quasi-Stationary Distributions for Reducible Absorbing Markov Chains in Discrete Time[J]. Markov Processes Relat. Fields, 2009(15): 191-204.
 [7] 张凯, 伍瑞昌, 等. 基于 Simio 的排队系统仿真分析[J]. 兵工自动化, 2011, 30(2): 94-96.
 [8] 陶小宝, 陈益民. 基于排队理论的低空导弹部队作战效能评估[J]. 兵工自动化, 2008, 27(1): 21-23.
 [9] 徐克虎, 孟强, 李科. 基于对抗演练的坦克分队进攻方式评价[J]. 四川兵工学报, 2012, 31(7): 1.

柱底面中心的距离约为 72 cm, 仿真结果与试验结果的误差约为 7.6%, 能够满足工程设计精度要求。

3 结论

笔者采用 ProCAST 程序对熔铸炸药的凝固过程进行了数值模拟, 分析了装药内部温度场的变化规律, 重点计算了缩孔和缩松的形成过程和位置。缩孔缩松所在位置的仿真结果与试验结果基本吻合, 说明 ProCAST 程序能够模拟熔铸炸药的凝固过程, 可以应用于熔铸炸药的工艺设计。

参考文献:

[1] Sun Dawi, Suresh V. Garimella. Numerical and experimental investigation of the melt casting of explosives[J]. Propellants, explosives, pyrotechnics, 2005, 30(5): 369-380.
 [2] 李敬明, 田勇, 张明, 等. 熔黑梯炸药凝固过程的数值模拟与实验验证[J]. 含能材料, 2009, 17(4): 428-430.
 [3] 李敬明, 田勇, 张伟斌, 等. 炸药熔铸过程缩孔和缩松的形成和预测[J]. 火炸药学报, 2011, 34(2): 17-21.
 [4] 董一巍, 卜昆, 窦杨青, 等. 基于 ProCAST 仿真文件的精铸模具反变形方法[J]. 航空制造技术, 2009(20): 72-75.
 [5] Jones, Yuan C. Advances in shell moulding for investment casting[J]. Journal of Material Processing Technology, 2003, 135(2-3): 258-265.
 [6] ESI group. ProCAST user manual[M]. France: ESI group, 2009: 353-358.
 [7] 罗一鸣, 王浩, 蒋秋黎, 等. 熔铸炸药热爆炸临界工艺温度的计算方法[J]. 兵工自动化, 2012, 31(6): 42-44.