doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2012.11.006

扩展有限元方法和水平集理论在裂纹扩展中的应用

张迪，徐晖
（中国人民解放军陆军军官学院机械电子工程系，合肥 230031）

摘要：针对弹靶裂纹等不连续因素导致常规有限元方法计算量大和结果精度低的问题，设计一种将水平集法和扩展有限元法相结合的方法。以具体的杆弹侵彻实验为依据，采用指数间断函数来表征裂纹对位移的影响，利用水平集理论定义比界面高一维的零水平集函数来表示裂纹界面，建立相应模型并进行数值模拟计算。计算结果显示，该方法能够准确地分析裂纹的扩展，并可生成侵彻过程中不同阶段的侵彻图和等塑性应变图。

关键词：扩展有限元方法；裂纹扩展；水平集法；数值方法
中图分类号：TJ06　**文献标志码**：A

Application of Extended Finite Element Method and Level Set Theory in Crack Growth

Zhang Di, Xu Hui
(*Dept. of Mechanical & Electronic Engineering*, *Army Officer Academy of PLA*, *Hefei* 230031, *China*)

Abstract: For solving the problem of discontinuous factors (such as target crack), that resulting in large amount of calculation and low precision of finite element method, design the extended finite element method procedure through combination of the extended finite element method and level set theory. Based on experiment about projectile penetrates the target, adopt index discontinuous function to show the influence of crack on displacement, use level set theory to define the zero level set function which dimension is higher than interface to express crack interface, build models and carry on numerical calculate. The result shows this method can analysis crack growth accurately, and it can create the pictures of projectile penetrates the target and plastic strain in different stage.

Key words: extended finite element method; crack growth; level set method; numerical method

0 引言

对弹靶撞击和侵彻靶板的研究具有重要的军事意义，而描述侵彻过程中由裂纹开裂引起的非连续位移场，则是这一课题的难点和重点。为了解决裂纹等不连续因素对位移造成的影响，常规有限元方法(the conventional finite element method，CFEM)在划分网格时必须满足 2 个条件：1) 把裂纹设置为有限单元的边；2) 裂纹尖端必须是单元节点。在二维有限元范畴内研究裂纹，裂纹面通常是一条不规则的曲线，导致网格划分密度很高；随着裂纹的生长，裂纹位置发生变动，需要以新的裂纹面重新划分网格。这 2 个因素造成常规有限元方法计算量大和结果精度低。

在这种背景下，美国 Belytschko 教授于 2000 年提出了扩展有限元方法[1](the extended finite element method，XFEM)，其基本思想来源于单位分解法[2](partition of unity method，PUM)。即通过在位移模式中引入反映位移不连续的附加函数，把裂纹问题在位移公式的范围内得到解决，不需要高密度、重复更新网格。虽然扩展有限元方法无需以裂纹为边界划分网格，存在裂纹位置确定的问题，由于在裂纹扩展过程中裂纹处于一个不断变化的状态，需通过水平集法[3-4](level set method，LSM)追踪裂纹扩展。

水平集理论通过零水平集函数追踪裂纹面的位置，随着裂纹的生长和位置变动，水平集可以随时跟着调整，而且水平集在更新时不需重新划分网格，这与扩展有限元法特色相符合[5]。因此，笔者对扩展有限元方法的位移模式进行推导，将水平集法和扩展有限元法相结合，编写了扩展有限元程序，对弹靶撞击和侵彻靶板问题进行研究。

1 扩展有限元的位移模式

在扩展有限元方法里，有限单元网格分为 3 种类型：传统单元、裂纹完全贯穿单元和裂尖终止单元。假设在裂纹完全贯穿单元内存在 3 个点 X、Y 和 Z，如图 1 所示。X 和 Y 在裂纹上侧，Z 则位于裂纹下侧，它们相对裂纹的距离分别为 d(x)、d(y)和

收稿日期：2012-05-05；**修回日期**：2012-06-02
作者简介：张迪(1986—)，男，安徽人，在读研究生，从事 CAD 技术与图像处理研究。

$d(z)$。其中 $d(x)=d(z)$，$d(x)<d(y)$。通过分析可知裂纹对点 X 的位移量的影响大于点 Y。裂纹面对点 X、点 Y 的位移量具有相同的影响，但方向不同。笔者采用指数间断函数来表征裂纹对位移的影响。指数间断函数的形式可定义为

$$h(d(x))=\begin{cases}e^{-d(x)}, & d(x)\geqslant 0\\ -e^{d(x)}, & d(x)<0\end{cases} \tag{1}$$

裂尖对裂尖终止单元的位移影响具有奇异性，可采用裂尖渐近位移场附加函数 $F_\gamma(x)$ 对其描述：

$$\left[F_\gamma(x)\right]=\left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\ \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\ \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\ \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right] \tag{2}$$

式中：r，θ为以裂纹尖端为坐标原点的极坐标系。

在常规优先于位移模式中加入指数间断函数和裂尖渐近位移场函数，得到 XFEM 的位移模式为

$$u(x)=\sum_{i\in A}u_iN_i(x)+\sum_{i\in B}b_iN_i(x)H(x)+\sum_{i\in C}N_i(x)\sum_{\alpha=1}^{4}c_i^\gamma T_\gamma(x) \tag{3}$$

式中：A 为所有节点的集合；B 为裂纹完全贯穿单元所含节点的集合；C 为裂尖终止单元所含节点的集合；N_i 为传统单元中节点 i 的形函数；b_i 为节点 i 与指数间断函数相关的节点加强自由度；c_i^γ 为裂尖处与弹性渐近裂尖函数有关的节点加强自由度；u_i 为节点 i 位移向量的连续部分。

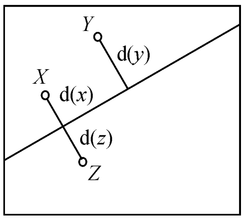

图 1 裂纹对不同点位移影响分析图

2 水平集法

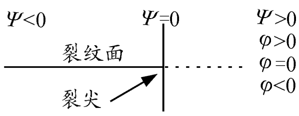

图 2 水平集理论中的裂纹描述

水平集理论是一种用于确定界面位置和追踪裂纹界面移动的数值方法[5]。该方法通过定义比界面高一维的零水平集函数来表示裂纹界面。采用裂纹面水平集 $\varphi(x(t),t)$ 和波前水平集 $\psi(x(t),t)$ 来描述裂纹的位置，2 个水平集定义的界面相互垂直(图 2)。移动界面 $\Omega(t)\subset R^2$ 可表示为

$$\Omega(t)=\{x\subset R^2:\varphi(x,t)=0,\psi(x,t)<0\} \tag{4}$$

$\varphi(x,t)=\pm\min\limits_{x_\Gamma\in\Omega(t)}\left\|x-x_\Omega\right\|$ 定义为裂纹面水平集函数，用来描述裂纹界面。式中 $\varphi(x,t)$ 的绝对值为点 x 距离界面距离，符号取决于点 x 位于裂纹的哪一侧。若 x 位于 $\Omega(t)$ 所定义的裂纹上侧，前面的符号取正号，否则取负号。波前水平集函数定义为 $\psi(x,t)=(x-x_\Gamma)\boldsymbol{t}'$，可以用来描述裂尖位置，式中 $\boldsymbol{t}'$ 表示裂尖单位切向矢量。

笔者用 $\varphi_{\min},\varphi_{\max}$ 和 $\psi_{\min},\psi_{\max}$ 分别表示裂纹面水平集和波前水平集的最小值和最大值。若 $\psi_{\max}<0,\ \varphi_{\min}\varphi_{\max}<0$，则该单元被裂纹完全贯穿。若 $\psi_{\min}\psi_{\max}<0,\ \varphi_{\min}\varphi_{\max}<0$，则该单元为裂尖终止单元。

3 实例

为了解决杆弹撞击和侵彻问题中遇到的裂纹扩展问题，笔者结合扩展有限元方法和水平集法编制了扩展有限元程序，并很好地解决了侵彻过程中的二维滑移面问题和裂纹跟踪问题。笔者以 A.J.Piekutowski 等人所做的速度在 280～860 m/s 范围内，钢质杆弹侵彻铝质靶板实验[6-7]为模型，进行裂纹扩展研究。如图 3 所示，弹丸初速 V_0=633 m/s，其中 a=6.45 mm，L=67.5 mm，l=21.4 mm。靶板尺寸为 304 mm×304 mm×26.3 mm。靶板上存在一个细微裂缝。在侵彻过程中裂纹将产生变形和扩展，下面笔者对侵彻过程进行模拟计算。

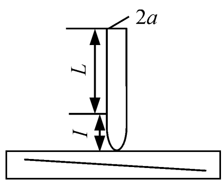

图 3 卵形杆弹对靶板的正撞击

由于杆弹的贯穿路径与靶板中线重合，并且杆弹和靶板都具有对称性，笔者只须对整个结构左侧进行建模，以靶板中线为对称轴将左侧模型映射到右边，即完成了整个建模过程。弹贯穿路径周围的网格受力较大，产生形变、滑移等诸多情况；而靶板左右两端区域的网格形变较小。鉴于以上特点，笔者将靶板网格设置成变网格。侵彻通道附近取为细网格，远处则为粗网格[7]。杆弹刚接触靶板时的网格分布如图 4。

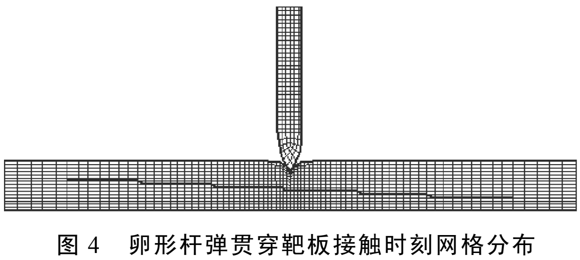

图 4 卵形杆弹贯穿靶板接触时刻网格分布

(下转第 28 页)