doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2012.01.008

基于直觉三角模糊数向量投影的多属性决策方法

王安，周存宝
（解放军炮兵学院应用数学系，合肥 230031）

摘要：针对直觉三角模糊数向量投影引发的多属性决策问题，提出了一种属性权重确知、且属性值以直觉三角模糊数形式给出的多属性决策方法。从向量投影的角度出发，给出 2 个直觉三角模糊数向量之间投影的算法，进而利用各个方案的加权属性值在模糊理想解上的投影值大小对方案进行排序，并用实例进行验证。实验结果表明：该方法简洁明了、思路清晰，具有一定可行性和实用性，易于在实际应用中推广。

关键词：直觉三角模糊数；投影；多属性决策；偏好
中图分类号：TJ302 **文献标志码**：A

Method for Multi-Attribute Decision-Making Based on the Projection of Intuitionistic Triangular Fuzzy Number Vectors

Wang An, Zhou Cunbao
(*Dept.* of *Applied Mathematics*, *Artillery Academy of PLA*, *Hefei* 230031, *China*)

Abstract: Aiming at the multiple attributes decision making problem caused by intuitionistic triangular fuzzy number vectors' projection, a method is proposed in which the attribute weights are completely known and the attribute values are in the form of intuitionistic triangular fuzzy numbers. From the angle of vector projection, the arithmetic of projection between two intuitionistic triangular fuzzy number vectors is given, then the alternatives are ranked by using the projection of the weighted attribute values of every alternatives on the fuzzy positive ideal point. In the end a numerical example is given out. The results show that this method is simple, clear and easy for use, and the work has an important applied value for multiple attributes decision making.

Key words: intuitionistic triangular fuzzy numbers; projection; multiple attributes decision making; preferences

0 引言

自从 Zadeh 于 1965 年提出模糊集理论以来，该理论已在现代社会的各个领域得到了广泛的应用。1986 年保加利亚学者 K.Atanassov 提出了直觉模糊集[1](intuitionistic fuzzy set)的概念，同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度 3 方面信息，能够更加细腻地描述和刻画客观世界的模糊性本质，使之在处理不确定信息时具有更强的表现能力和灵活性，也更符合人们的思维方式。1989 年 K.Atanassov 等进一步推广了直觉模糊集，用区间数表示隶属度和非隶属度，提出了区间直觉模糊集[2]的概念，定义了区间直觉模糊集的一些基本运算法则。考虑到三角模糊数在表示“某个值左右”时有其独特的优势，文献[3]将直觉模糊集作了进一步的拓展，用三角模糊数表示隶属度和非隶属度，提出了直觉三角模糊数的概念。文献[4]在直觉三角模糊数的性质、运算法则和算子等方面进行了研究。

有关直觉三角模糊数向量投影的研究，目前尚未见报道，而投影法在多属性决策中是一种较为常用的决策方法。为此，笔者在前人研究的基础上，讨论了直觉三角模糊数向量的投影问题，并提出了基于该投影算法的多属性决策模型。

1 预备知识

定义 1[2] 设论域 U 是一个非空有限集合，称 $V=\{(u,\langle t_v(u), f_v(u)\rangle)\,|\,u\in U\}$ 为直觉模糊集。其中 $t_v(u)$ 和 $f_v(u)$ 分别表示 U 中元素 u 属于 U 的隶属度和非隶属度，即 $t_v:U\to[0,1]$，$f_v:U\to[0,1]$，而且 $0\le t_v(u)+f_v(u)\le 1$，$\forall u\in U$。

定义 2[3] 若 $\beta=(l,p,q)\in F(D)$，$D=[0,1]$，则称 β 为 D 上的一个三角模糊数，其隶属函数 $\mu_\beta(x):R\to[0,1]$ 可表示为

$$\mu_\beta(x)=\begin{cases}(x-l)/(p-l)\ , & l\le x\le p\\ (x-q)/(p-q)\ , & l\le x\le p\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2011-08-17；**修回日期**：2011-09-15
基金项目：炮兵学院 2010 年科研学术基金项目“模糊群决策方法及其应用研究”（2010XYJJ-014）
作者简介：王安（1987—），男，浙江人，研究生，从事预测与决策分析研究。

其中：$x \in R$，$0 \le l \le p \le q \le 1$，$l$ 和 q 分别称为模糊数 β 的下限和上限；p 表示在此区间中取值可能性最大的数，称为模糊数 β 的重心。若 $l = p = q$，则 β 为实数。

定义 3[5] 设 $\tilde{\beta}_1 = (l_1, p_1, q_1)$ 和 $\tilde{\beta}_2 = (l_2, p_2, q_2)$ 为 2 个任意三角模糊数，则称

$$\tilde{\beta}_1 \otimes \tilde{\beta}_2 = \frac{1}{3}(l_1 l_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2) \tag{2}$$

为 $\tilde{\beta}_1$ 与 $\tilde{\beta}_2$ 的积。

定义 4[3] 设论域 U 是一个非空有限集合，称 $G = \{(u, \langle \tilde{t}_G(u), \tilde{f}_G(u) \rangle) \mid u \in U\}$ 为直觉三角模糊集。其中：$\tilde{t}_G(u) = (\tilde{t}_G^{\,1}(u), \tilde{t}_G^{\,2}(u), \tilde{t}_G^{\,3}(u)) \in F(D)$ 和 $\tilde{f}_G(u) = (\tilde{f}_G^1(u), \tilde{f}_G^2(u), \tilde{f}_G^3(u)) \in F(D)$ 均是 $D = [0,1]$ 上的三角模糊数，分别表示 U 中元素 u 属于 U 的隶属度和非隶属度，并且满足 $0 \le \tilde{t}_G^{\,3}(u) + \tilde{f}_G^{\,3}(u) \le 1$，$\forall u \in U$。

参照直觉模糊数和区间直觉模糊数的定义，称 $\langle \tilde{t}_v(u), \tilde{f}_v(u) \rangle$ 为直觉三角模糊数，简记为 $\langle (a,b,c), (l,p,q) \rangle$。其中：$(a,b,c) \in F(D)$，$(l,p,q) \in F(D)$，且 $c + q \le 1$，$\forall u \in U$。记 Ω 为全体直觉三角模糊数的集合。

定义 5[5] 设 $\alpha^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_n^{(1)})$ 和 $\alpha^{(2)} = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \cdots, \alpha_n^{(2)})$ 是 2 个任意 m 维向量，称

$$\mathrm{Pr}\, j_{\alpha^{(2)}}(\alpha^{(1)}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(1)} \alpha_j^{(2)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(1)})^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(2)})^2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(1)})^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(1)} \alpha_j^{(2)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(2)})^2}} \tag{3}$$

为 $\alpha^{(1)}$ 在 $\alpha^{(2)}$ 上的投影。

关于投影值含义的解释，之前有不少文献认为：$\mathrm{Pr}\, j_{\alpha^{(2)}}(\alpha^{(1)})$ 反映了向量 $\alpha^{(1)}$ 和 $\alpha^{(2)}$ 的接近程度，其值越大，表明向量 $\alpha^{(1)}$ 和 $\alpha^{(2)}$ 越接近；其值越小，表明向量 $\alpha^{(1)}$ 和 $\alpha^{(2)}$ 越分离。笔者认为该表述不完全正确，只有当 $\mathrm{Pr}\, j_{\alpha^{(2)}}(\alpha^{(1)})$ 的值小于向量 $\alpha^{(2)}$ 的模 $|\alpha^{(2)}|$ 时，上述表述才是正确的，否则 $\mathrm{Pr}\, j_{\alpha^{(2)}}(\alpha^{(1)})$ 越大，代表 $\alpha^{(1)}$ 和 $\alpha^{(2)}$ 越远离。在直觉三角模糊数向量的投影中具有同样的道理。在多属性决策中，笔者将方案向量投影到理想解上，理想解的取法决定了其模是必然不小于方案向量的，因此不需要考虑这个问题，投影值的大小可以反映方案与理想解的接近或分离程度。

定义 6 设 $\tilde{\alpha}^{(1)} = (\tilde{\alpha}_1^{(1)}, \tilde{\alpha}_2^{(1)}, \cdots, \tilde{\alpha}_n^{(1)})$，$\tilde{\alpha}^{(2)} = (\tilde{\alpha}_1^{(2)}, \tilde{\alpha}_2^{(2)}, \cdots, \tilde{\alpha}_n^{(2)})$ 为 2 个任意 m 维直觉三角模糊数行向量，其中 $\tilde{\alpha}_j^{(k)} = \langle (a_j^{(k)}, b_j^{(k)}, c_j^{(k)}), (l_j^{(k)}, p_j^{(k)}, q_j^{(k)}) \rangle$ $(k = 1,2)$，则称

$$\mathrm{Pr}\, j_{\tilde{\alpha}^{(2)}}(\tilde{\alpha}^{(1)}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} (a_j^{(1)}, b_j^{(1)}, c_j^{(1)}) \otimes (a_j^{(2)}, b_j^{(2)}, c_j^{(2)})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_j^{(2)}, b_j^{(2)}, c_j^{(2)}) \otimes (a_j^{(2)}, b_j^{(2)}, c_j^{(2)})}} - \frac{\sum_{j=1}^{n} (l_j^{(1)}, p_j^{(1)}, q_j^{(1)}) \otimes (l_j^{(2)}, p_j^{(2)}, q_j^{(2)})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (l_j^{(2)}, p_j^{(2)}, q_j^{(2)}) \otimes (l_j^{(2)}, p_j^{(2)}, q_j^{(2)})}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (a_j^{(1)} a_j^{(2)} + b_j^{(1)} b_j^{(2)} + c_j^{(1)} c_j^{(2)})}{\sqrt{3 \sum_{j=1}^{n} [(a_j^{(2)})^2 + (b_j^{(2)})^2 + (c_j^{(2)})^2]}} - \frac{\sum_{j=1}^{n} (l_j^{(1)} l_j^{(2)} + p_j^{(1)} p_j^{(2)} + q_j^{(1)} q_j^{(2)})}{\sqrt{3 \sum_{j=1}^{n} [(l_j^{(2)})^2 + (p_j^{(2)})^2 + (q_j^{(2)})^2]}} \tag{4}$$

为直觉三角模糊数向量 $\tilde{\alpha}^{(1)}$ 在 $\tilde{\alpha}^{(2)}$ 上的投影。

上述公式将直觉三角模糊数的隶属度和非隶属度同等看待，由于隶属度和非隶属度是代表相反的含义，分别表示“支持”和“反对”的程度，因此在考虑投影时，笔者将隶属度和非隶属度按三角模糊数的运算法则分别进行投影计算，并将其差值作为作为最后的投影结果。

在多属性决策中，考虑到决策者对于风险的偏好程度，笔者对式 (4) 作适当修改：

$$\mathrm{Pr}\, j_{\tilde{\alpha}^{(2)}}(\tilde{\alpha}^{(1)}) = \beta \frac{\sum_{j=1}^{n} (a_j^{(1)}, b_j^{(1)}, c_j^{(1)}) \otimes (a_j^{(2)}, b_j^{(2)}, c_j^{(2)})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_j^{(2)}, b_j^{(2)}, c_j^{(2)}) \otimes (a_j^{(2)}, b_j^{(2)}, c_j^{(2)})}} - (1 - \beta) \frac{\sum_{j=1}^{n} (l_j^{(1)}, p_j^{(1)}, q_j^{(1)}) \otimes (l_j^{(2)}, p_j^{(2)}, q_j^{(2)})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (l_j^{(2)}, p_j^{(2)}, q_j^{(2)}) \otimes (l_j^{(2)}, p_j^{(2)}, q_j^{(2)})}} \tag{5}$$

式中：$0 \le \beta \le 1$，当 $\beta = 1$ 时，表示该决策者属于完全冒险型；$\beta = 0$ 时，表示该决策者属于完全保守型；当 $\beta = 0.5$ 时，表示该决策者属于中立型。

2　直觉三角模糊数多属性决策方法

模糊投影多属性决策方法的基本思想是：将模糊方案向量投影到理想解上，投影结果越大说明该方案与理想解越接近。设 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 为决策方案集，$C = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为评价指标（属性）集，$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为属性的加权向量，$\omega_j \in [0,1]$，$\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 1$。记 $M = \{1,2,\cdots,m\}$，$N = \{1,2,\cdots,n\}$。那么确定方案价值大小次序的决策步骤如下：

Step 1：由专家给出的方案 A_i 在属性 C_j 下的评估值 $\tilde{\alpha}_{ij}$（$\tilde{\alpha}_{ij} = \langle (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}), (l_{ij}, p_{ij}, q_{ij}) \rangle$ 为直觉三角模糊数），从而得到直觉三角模糊决策矩阵

$\widetilde{A}=(\widetilde{\alpha}_{ij})_{m\times n}$ ($i\in M$，$j\in N$)，其中 $\widetilde{A}_i=(\widetilde{\alpha}_{i1},\widetilde{\alpha}_{i2},\cdots,\widetilde{\alpha}_{in})$ 为第 i 个方案的决策向量。

Step 2：由 $\widetilde{A}$ 确定出方案属性的理想解 $\widetilde{r}^+=(\widetilde{r}_1^+,\widetilde{r}_2^+,\cdots,\widetilde{r}_n^+)$，其中

$$\tilde{r}_j^+=\langle(a_j^+,b_j^+,c_j^+),(l_j^+,p_j^+,q_j^+)\rangle=$$
$$\langle(\max_i a_{ij},\max_i b_{ij},\max_i c_{ij}),(\min_i l_{ij},\min_i p_{ij},\min_i q_{ij})\rangle$$

Step 3：对 $\widetilde{A}$ 加权化为 $\widetilde{T}=(\widetilde{t}_{ij})_{m\times n}$ 其中

$$\widetilde{t}_{ij}=\omega_j\widetilde{\alpha}_{ij}=\langle(\omega_j a_{ij},\omega_j b_{ij},\omega_j c_{ij}),(\omega_j l_{ij},\omega_j p_{ij},\omega_j q_{ij})\rangle$$

对理想解 $\widetilde{r}^+=(\widetilde{r}_1^+,\widetilde{r}_2^+,\cdots,\widetilde{r}_n^+)$ 加权得 $\widetilde{s}^+=(\omega_1\widetilde{s}_1^+,\omega_2\widetilde{s}_2^+,\cdots,\omega_n\widetilde{s}_n^+)$。

Step 4：根据决策者对风险的喜好程度取适当的 β 值，进而根据式 (4) 计算各方案加权属性值向量 $\widetilde{T}_i=(\widetilde{t}_{i1},\widetilde{t}_{i2},,\widetilde{t}_{im})$ 在 $\widetilde{s}^+$ 上的投影 $\Pr j_{\tilde{s}^+}(\widetilde{T}_i)$。

Step 5：按照 $\Pr j_{\tilde{s}^+}(\widetilde{T}_i)$ 值从大到小的排列顺序，值最大的序号所对应方案最佳。

3　案例分析

假设某军方欲采购火炮装配部队，主要考虑 3 项指标：反应能力(C_1)、火炮突击能力(C_2)、机动性及战场环境适应能力(C_3)，此 3 种指标均为效益型指标，指标权重向量为：$\omega=(0.2,0.5,0.3)^{\mathrm{T}}$。现有 3 种系列的火炮(方案) A_i ($i=1,2,3$)可供选择，每种火炮指标信息用直觉三角模糊数表示，如表 1。

表 1　3 种系列火炮的指标信息

方案	C_1	C_2	C_3
A_1	(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.2,0.3)	(0.6,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.2)	(0.5,0.6,0.6),(0.2,0.3,0.4)
A_2	(0.4,0.5,0.6),(0.1,0.2,0.3)	(0.5,0.6,0.6),(0.1,0.2,0.3)	(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.2,0.3)
A_3	(0.7,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.2)	(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.1,0.2)	(0.5,0.5,0.6),(0.2,0.3,0.3)

假设决策者为风险中立型，采购部门应如何选择火炮？

利用笔者提出的模型，首先求得方案的理想解为

$$\tilde{r}^+=(\langle(0.7,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.2)\rangle,\langle(0.6,0.7,0.8),(0.1,0.1,0.2)\rangle,\langle(0.5,0.6,0.7),(0.1,0.2,0.3)\rangle)$$

然后根据步骤 3 对方案属性值和理想解分别进行加权，进而利用式 (5) 得各方案在理想解上的投影：

$$\Pr j_{\tilde{s}^+}(\tilde{T}_1)=0.286\,7,\quad \Pr j_{\tilde{s}^+}(\tilde{T}_2)=0.220\,6,\quad \Pr j_{\tilde{s}^+}(\tilde{T}_3)=0.263\,2$$

最后，按照 $\Pr j_{\tilde{s}^+}(\tilde{T}_i)$ $(i=1,2,3)$ 值的大小对方案 A_i 进行排序：

$$A_1\succ A_3\succ A_2$$

所以最理想的方案是 A_1，即第一种火炮是最佳选择。

4　结语

实例结果证明：基于直觉三角模糊数的多属性决策方法是可行和实用的，该方法简洁明了，思路清晰，易于在实际应用中推广。

参考文献：

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[2] Atanassov K, G.Gargov. interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[3] 刘峰, 袁学海. 模糊数直觉模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(1): 88-91.

[4] 汪新凡. 模糊数直觉模糊几何集成算子及其再决策中的应用[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 607-612.

[5] 彭展声, 李荣钧. 模糊多属性决策的投影折衷方法[J]. 模糊系统与数学, 2006, 20(4): 86-90.