

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2011.05.014

# 一种新的马赫数解算方法

杨利兰, 赵忠, 黄雪妮

(西北工业大学 自动化学院, 西安 710129)

**摘要:** 为了更好地测量  $Ma$  数, 通过研究  $Ma$  数与总压、静压的关系式, 提出一种  $Ma$  数测量的改进算法。该算法把  $Ma$  数基本测量公式进行泰勒展开并取二阶近似, 再引入一个与  $Ma$  数关联的修正因子  $\varepsilon$ , 得到  $Ma$  数简化解算公式, 并给出了具体的解算步骤。仿真结果表明, 该算法在精度和实时性上都能满足系统的要求, 具有一定的实用性和推广价值。

**关键词:**  $Ma$  数; 泰勒展开; 修正因子; 精度

**中图分类号:** TP301.6 **文献标志码:** A

## A New Algorithm for Mach Number Calculation

Yang Lilan, Zhao Zhong, Huang Xueni

(College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

**Abstract:** Based on relation equation of total pressure and static pressure, for better measuring  $Ma$  number, an improved algorithm of Mach number was proposed to measure Mach number. The algorithm made a Taylor expansion to Mach number measurement formulation, taking second order approximation, and introduced a correction factor which associated with  $Ma$ . Specific calculation steps were given. The simulation results show that it can satisfy the system requirements in precision and in real-time. It has a certain practicality and spreading value.

**Keywords:** Mach number; Taylor expansion; correction factor; precision

### 0 引言

马赫数是真空速  $V$  与声速  $c$  的比值, 一般情况下,  $Ma$  数达到一定值 (0.7 左右) 后, 在机翼某些部位的气流将可能达到超音速并出现局部激波和产生波阻, 阻力将剧烈增加, 影响飞机的稳定性和操纵性, 甚至发生激波失速<sup>[1]</sup>。在现代飞机上, 马赫数不仅是防止激波失速的重要依据, 也是表征飞机性能的重要参数。因此  $Ma$  数的测量极为重要。

马赫数测量系统由总压 (或动压)、静压测量系统以及模拟式或数字式函数解算装置组成。随着现代计算机的飞速发展, 马赫数的解算方法也多样化, 目前最常用的方法是插值法。迭代法<sup>[2]</sup>和泰勒级数展开法<sup>[3]</sup>也被用于求解, 前者在基本公式的基础上通过牛顿迭代法求解, 后者通过泰勒级数展开再反求解。此 2 种方法的误差级别在一个数量级上, 只达到一般飞行器的要求, 并且其计算量比较繁琐复杂。笔者通过研究马赫数与动、静压关系式, 提出了一种解算马赫数的新算法。

### 1 马赫数测量的基本公式

$Ma$  数可通过测量总压  $p_t$  (或动压  $q_c$ ) 和静压  $p_s$ , 再按相应的公式进行解算而获得。其基本测量

公式为<sup>[1]</sup>:

$$\frac{p_t}{p_s} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}, Ma \leq 1 \quad (1)$$

$$\frac{p_t}{p_s} = \frac{k-1}{2} Ma^2 \left[ \frac{(k+1)^2 Ma^2}{4kMa^2 - 2(k-1)} \right]^{\frac{1}{k-1}}, Ma > 1 \quad (2)$$

$p_t$  为总压;  $p_s$  为静压;  $k=1.4$  为空气绝热指数, 把  $k$  带入式 (1) 和式 (2) 可得:

$$\frac{p_t}{p_s} = \left[ 1 + 0.2 Ma^2 \right]^{3.5}, Ma \leq 1 \quad (3)$$

$$\frac{p_t}{p_s} = \frac{166.922 Ma^7}{(7 Ma^2 - 1)^{2.5}}, Ma > 1 \quad (4)$$

由式 (3)、式 (4) 可以看出,  $Ma$  数与总压静压比值  $p_t/p_s$  是非线性关系, 必须通过间接方法才能够得到  $Ma$  数。目前, 在众多的  $Ma$  数测量系统中, 实现其解算任务的方案也不尽相同。在所采用的压力传感器上, 有的采用线性传感器而用较复杂的解算装置来完成解算任务。也有的用具有相应函数关系的非线性传感器, 而其解算装置却较简单。

### 2 改进算法的基本思想

#### 2.1 解算公式的推导

笔者研究的是解算装置的改进算法。 $Ma$  数的

收稿日期: 2010-12-23; 修回日期: 2011-02-24

作者简介: 杨利兰 (1987—), 女, 湖南人, 硕士, 从事初始对准、组合导航等技术研究。

解算方案如图 1。用压力比传感器测出总压  $p_t$  与静压  $p_s$  之比, 然后解出  $Ma$  数。



图 1  $Ma$  数解算方案

下面推导算法的解算公式。对式 (3)、式 (4) 分别进行泰勒展开, 并取二阶近似; 分别引入修正因子  $\varepsilon$ 。

1)  $Ma \leq 1$  时

对  $Ma$  数的基本测量公式 (3) 进行泰勒展开得:

$$\frac{p_t}{p_s} = 0.7 Ma^2 + \frac{0.7}{4} Ma^4 + \frac{0.7}{40} Ma^6 + \frac{0.7}{1600} Ma^8 + \dots \quad (5)$$

取二阶近似, 并加入修正因子  $\varepsilon$  得:

$$\frac{p_t}{p_s} \approx 0.7 Ma^2 (1 + \varepsilon) \quad (6)$$

其中  $\varepsilon$  与  $Ma$  数的关系式为:

$$\varepsilon = f(Ma^2) = \frac{1}{4} Ma^2 + \frac{1}{40} Ma^4 + \frac{1}{1600} Ma^6 - \frac{1}{80000} Ma^8 \quad (7)$$

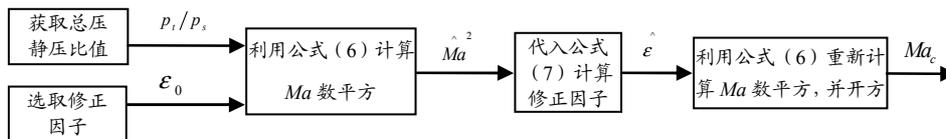


图 2 算法流程

概述整个解算步骤为:

- 1) 获取压力比传感器测量值  $p_t/p_s$ , 选取修正因子  $\varepsilon_0$ 。
- 2) 利用公式 (6) 及  $p_t/p_s$  值和  $\varepsilon_0$  值计算马赫数估计值的平方  $\hat{Ma}^2$ ;
- 3) 把②计算得到的  $\hat{Ma}^2$  代入式 (7) 计算  $\hat{\varepsilon}$ 。这在一定程度上减小修正因子  $\varepsilon_0$  的选取偏差。
- 4) 利用  $\hat{\varepsilon}$  重复步骤②重新计算马赫数。

3 算法仿真及评价

用 MATLAB 进行仿真实验。根据式 (7)、式 (9) 画出  $Ma$  数与压缩性系数 (或拟压缩性系数)  $\varepsilon$  关系如图 3。

表 1、表 2 分别列出了  $Ma \leq 1$  时和  $Ma \geq 1$  时不同  $Ma$  数值时的压缩性修正量  $\varepsilon$  的值。表 1 中数据可提供选取修正因子  $\varepsilon_0$  的依据。

此时, 修正因子  $\varepsilon$  即为压缩性修正系数  $\varepsilon$ , 其与  $Ma$  数的关系式与文献[1]中给出的一致, 在这里只取有限多项。

2)  $Ma > 1$  时

对  $Ma$  数的基本测量公式 (4) 进行泰勒展开, 取二阶近似, 再加入修正因子  $\varepsilon$  得:

$$\frac{p_t}{p_s} \approx 1.28765 Ma^2 (1 + \varepsilon) \quad (8)$$

其中  $\varepsilon$  与  $Ma$  数的关系式为:

$$\varepsilon = f(Ma^2) = -0.4195 Ma^{-2} + 0.0893 Ma^{-4} + 0.0191 Ma^{-6} + 0.0038 Ma^{-8} \quad (9)$$

此时, 修正因子  $\varepsilon$  与  $Ma$  数的关系类似式 (6) 的形式, 鉴于目前对  $Ma > 1$  的情况还没有压缩性修正系数的概念, 在下文中称作拟压缩性修正系数。

2.2 算法的解算思路与步骤

算法利用上节推导的公式 (6)~式 (9), 由图 2 的解算流程求得  $Ma$  数。(以  $Ma \leq 1$  例,  $Ma > 1$  的情况类似)。

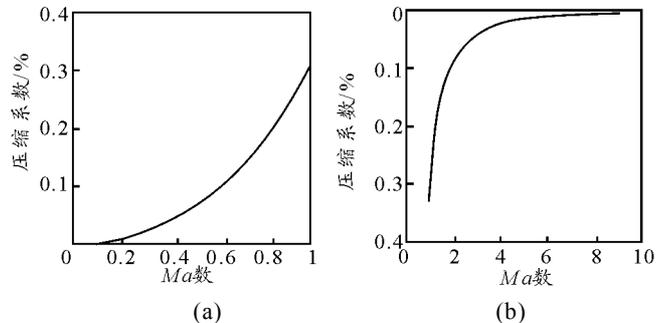


图 3 压缩性系数与马赫数的关系图

表 1 不同  $Ma$  数 ( $Ma \leq 1$ ) 时的  $\varepsilon$  值

$Ma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\varepsilon/\%$	0.25	1.00	2.27	4.06	6.41
$Ma$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\varepsilon/\%$	9.33	12.86	17.04	21.92	27.56

表 2 不同  $Ma$  数 ( $Ma \geq 1$ ) 时的  $\varepsilon$  值

$Ma$	1	2	3	4	5
$\varepsilon/\%$	-30.73	-18.48	-12.92	-9.90	-8.02
$Ma$	6	7	8	9	10
$\varepsilon/\%$	-6.73	-5.80	-5.10	-4.55	-4.10

为了比较客观地表现此改进算法的误差，在  $Ma \leq 1$  阶段计算  $Ma$  数的绝对误差，在  $Ma \geq 1$  阶段计算  $Ma$  数的相对误差。

绝对误差定义为：

$$\delta Ma_s = Ma_t - Ma_c$$

相对误差定义为：

$$\delta Ma_r = \frac{Ma_t - Ma_c}{Ma_t}$$

其中， $Ma_t$  为真实值， $Ma_c$  为算法解算值。

画出  $Ma$  数解算误差曲线如图 4。图 4 中①~④号曲线分别对应修正因子  $\epsilon_0$  取表 3 和表 4 中不同值的误差曲线。

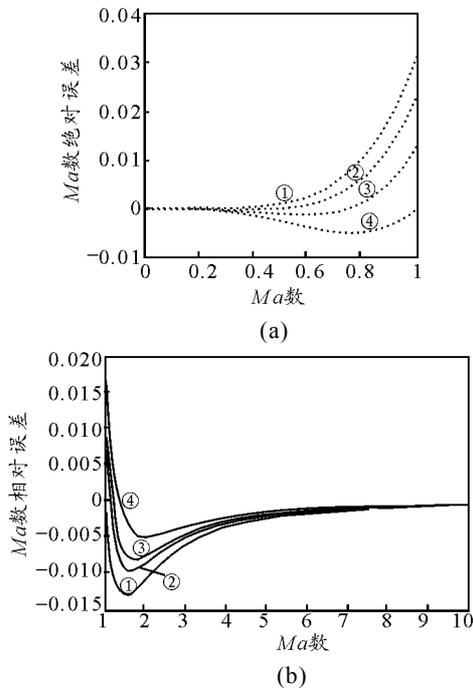


图 4 马赫数解算误差

表 3 不同  $\epsilon_0$  ( $Ma \leq 1$ ) 的最大解算误差

序号	$\epsilon_0/\%$	最大绝对误差	序号	$\epsilon_0/\%$	最大绝对误差
①	0.25	0.031 5	③	14.86	0.012 9
②	6.41	0.023 1	④	27.56	0.005 2

表 4 不同  $\epsilon_0$  ( $Ma > 1$ ) 的最大解算误差

序号	$\epsilon_0/\%$	最大相对误差	序号	$\epsilon_0/\%$	最大相对误差
①	-29.06	0.013 1	③	-23.36	0.012 2
②	-25.15	0.009 6	④	-18.48	0.185

从图 4 可以看出： $Ma \leq 1$  时曲线④（修正因子  $\epsilon_0 = 0.2756$ ）的  $Ma$  数最大解算误差最小。 $Ma > 1$  时曲线②（修正因子  $\epsilon_0 = -0.2515$ ）的  $Ma$  数最大解算误差最小。该结论可以作为实际应用中选取修正因

子的依据。

算法评价：

① 由表 3 和表 4 中  $Ma$  数的最大解算误差可知： $Ma$  数在区[0,1]上的解算误差的最大绝对误差为 0.005 2，在区间[1,10]上的最大相对误差为 0.009 6。解算误差不超过 2%，满足系统设计要求<sup>[5]</sup>。

② 相比牛顿迭代和泰勒展开求解，该算法解算过程只涉及到加减法、乘法以及乘方运算，计算量大大减少，具有更好的实时性，对计算机的位数要求减低。

③ 该算法适用于高马赫数的解算，为高超声速飞行器技术的发展提供一定应用基础。

④ 解算过程中可以重复解算步骤③、步骤④来提高解算精度，以适用于不同应用场合的精度需求。

#### 4 结束语

笔者提出的马赫数简化改进算法计算简易，达到了较理想的解算精度，满足了现代飞行器的设计要求。仿真结果表明，该算法计算量小、精度高，特别是提高了超高音速  $Ma$  数的解算精度，具有一定的实用性和推广价值。该算法也适用于高马赫数的解算，为高超声速飞行器技术的发展提供一定应用基础。而整合  $Ma \leq 1$ 、 $Ma \geq 1$  这 2 个区间的解算方法是进一步努力的方向。

#### 参考文献：

- [1] 樊尚春, 吕俊芳, 等. 航空测试系统[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2005.
- [2] 傅职忠. 超音速时修正空速与马赫数的换算及加速度因子的计算[J]. 中国民航学院学报, 1996, 14(6): 10-19.
- [3] Brent R. Cobleigh, Stephen A. Whitmore, and Edward A. Haering, Jr. Flush air-data Sensing (FADS) System Calibration Procedures and Results For Blunt Forebodies[R]. 1999 American Institute of Aeronautics & Astronautics or published with permission of author(s) and/or author(s)' sponsoring organization. AIAA 99-4815-501.
- [4] 项凤涛, 王正志, 吴第, 等. 捷联系统四元数姿态解算的精细积分法[J]. 四川兵工学报, 2010(5): 103-106.
- [5] Zheng Chengjun, Lu Yuping, Hezhen, Improved Algorithms for Flush air-data Sensing System[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2006, 19(4): 335-339.
- [6] Whitmore, Stephen A. and Timothy R. Moes, Measurement Uncertainty and Feasibility Study of a Flush Airdata System for a Hypersonic Flight Experiment, NASA TM-4627, 1994.