

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2011.04.020

广义 Haar 子波与类 Haar 子波性质及仿真

李松鹤^{1,2}, 袁晓¹, 赵正²

(1. 四川大学 电子信息学院, 成都 610065; 2. 西安卫星测控中心 着陆场站, 陕西 渭南 714000)

摘要: 为了减小 Haar 子波分析信号时大尺度下的误差, 对广义 Haar 子波和几种类 Haar 子波性质进行了分析, 并与 Haar 子波进行了比较。两者都继承了 Haar 子波的大部分性质, 而类 Haar 子波频域局域化特征更好。对脉冲压缩体制雷达中常用的线性调频信号和在国内外典型中低轨卫星测控体制中常用的 BPSK 调制信号进行仿真, 其结果证明了类 Haar 小波在对某些信号分析时要优于 Haar 小波, 为研究者更合理地选取子波提供了参考。

关键词: 广义 Haar 子波; 类 Haar 子波; 仿真

中图分类号: TN911.6; TP391.99 **文献标志码:** A

Characteristics and Simulations of Generalized Haar Wavelet and Quasi-Haar Wavelet

Li Songhe^{1,2}, Yuan Xiao¹, Zhao Zheng²

(1. School of Electronics & Information, Sichuan University, Chengdu 610065, China;

2. Landing Station, Xi'an Satellite Monitoring Center, Weinan 714000, China)

Abstract: To reduce the measurement errors of the Haar wavelet analysis in large-scale, analyze the characteristics of the generalized Haar wavelets and some kinds of the quasi-Haar wavelets and compare each of them with the Haar wavelet. Both of them have inherited most characteristics of the Haar wavelets, but the quasi-Haar wavelets have better frequency attenuation characteristics. Simulate LFM and BPSk signals. The simulation result shows that the quasi-Haar wavelet is the better choice in analyzing some kinds of signals than the generalized Haar wavelet. It can provide reference for researchers choose the suitable wavelets wisely.

Keywords: generalized Haar wavelet; quasi-Haar wavelet; simulation

0 引言

子波变换因为同时具有时-频分析能力, 成为了近代信号处理的主要工具, 被广泛应用于基础科学、应用科学尤其是信息科学、信息分析的方方面面^[1-2]。Haar 子波作为一种子波函数重要分支, 由于计算简单而被广泛应用到工程上。Haar 函数是唯一对称的实紧支标准正交子波基, 它在时域具有很好的紧支性, 但由于其频域谐波衰减较慢, 导致在子波分析的尺度(也即频率)方向上存在误差。在数字调制模式识别、卫星测控信号识别等领域, 一般选取 Morlet、Daubechies 等子波^[3-4], 或者选取比 Haar 子波更好频域局域化特征的种类 Haar 子波^[5], 而目前关于类 Haar 子波应用的文献很少, 还未见关于类 Haar 子波函数性质的研究。

笔者首先对广义 Haar 子波和类 Haar 子波的性质进行分析, 并根据参考文献[5]定义了 n 阶 Haar 子波, 重点对这种类 Haar 子波的性质进行了理论分析。然后, 通过对单频信号、线性调频信号和 BPSK 调制信号^[6-7]的仿真, 对 Haar 子波、广义 Haar 子波、类 Haar 子波变换结果进行了分析讨论。

1 广义 Haar 子波

1.1 Haar 尺度系数函数及 Haar 子波的广义化

由 Harr 尺度系数序列 $h_H = [1/2, 1/2]$ 得到尺度滤波器频谱函数:

$$H_H(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\omega}, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases} \quad (1)$$

由 h_H 构造的 Haar 系数尺度函数为:

$$\begin{cases} h_H(t) = \frac{1}{2}\text{sinc}(\pi t) + \frac{1}{2}\text{sinc}(\pi(t-1)) = \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi(t-1))}{\pi t(t-1)} \\ \Downarrow \\ \hat{h}_H(\omega) = u_{[-\pi, \pi]}(\omega)H_H(\omega) \end{cases} \quad (2)$$

定义时移因子 $\tau \in R$ 作用域 Haar 尺度系数函数, 得到 $h_H(t - \tau)$, 然后对其整数点抽样^[8-10], 从而得到一类新的时间序列:

$$h_H(\tau) : h_k = h_H(k - \tau), \quad k \in Z, \tau \in R \quad (3)$$

这便是文献[9-11]中研究的广义 Haar 子波尺度系数序列。

收稿日期: 2010-12-29; 修回日期: 2011-01-25

作者简介: 李松鹤(1982—), 男, 河南人, 硕士研究生, 工程师, 从事信号与信息处理研究。

广义 Haar 尺度系数序列 $h_H(\tau)$ 对应的滤波函数为:

$$H_{H,\tau}(\omega) = H_H(\omega) \exp \left\{ -i\tau\omega + i2\pi\tau \operatorname{sgn}(\omega) \operatorname{int} \left(\frac{|\omega| + 2\pi}{2\pi} \right) \right\} \quad (4)$$

其中 sgn 为符号函数, int 为取整函数。

正交性:

$$|H_{H,\tau}(\omega)|^2 + |H_{H,\tau}(\omega + \pi)|^2 = |H_H(\omega)|^2 + |H_H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (5)$$

广义 Haar 子波 $\varphi_{H,\tau}(t)$ 和 $\psi_{H,\tau}(t)$ 的频谱为:

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_{H,\tau}(\omega) = \hat{\varphi}_H(\omega) \exp(i\theta_\tau(\omega)), \\ \hat{\psi}_{H,\tau}(\omega) = \hat{\psi}_H(\omega) \exp(i\xi_\tau(\omega)), \end{cases} \quad (6)$$

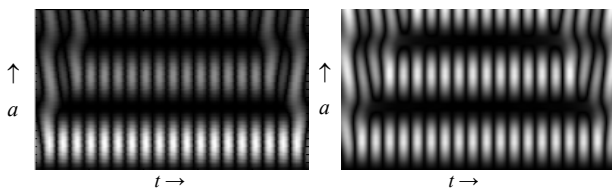
式中

$$\begin{cases} \theta_\tau(\omega) = -\omega\tau + 2\pi\tau \operatorname{int} \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \\ \xi_\tau(\omega) = -\pi\tau \operatorname{sgn}(\omega) \end{cases} \quad (7)$$

广义 Haar 子波继承了 Haar 子波的正交性, 在频域上与 Haar 子波的模相等, 只是相位发生了改变, 并具有同样的时、频局域化特征。

1.2 Haar 子波与广义 Haar 子波的缺陷

Haar 子波、广义 Haar 子波函数的谐波衰减较慢, 为了说明其对信号分析的影响, 对频率 1 Hz, 采样频率为 50 Hz 的单频信号进行连续 Haar 子波变换, 结果如图 1, 横坐标为扫描时间 t , 纵坐标为尺度 a , 图 1(a)、1(b) 中下方高亮部分是信号频率相对应的尺度, 左右两侧的波纹现象是由仿真中的边缘效应引起的, 而上方的次亮部分对应的大尺度是由于 Haar 子波函数的频域谐波分量导致的, 可以看出 Haar 子波函数的频率局域化特征不理想所引起的分析误差还是比较明显的。



(a) Haar 子波分析 (b) $\tau=1/2$ 广义 Haar 子波分析

图 1 单频信号 Haar、 $\tau=1/2$ 广义 Haar 子波分析平面投影

2 类 Haar 子波

2.1 正弦类子波

$$\psi_S(t) = k \sin(2\pi t) u_{[0,1]}(t) \quad (8)$$

其中, $k > 0$, 且为常数^[5]。正弦类 Haar 子波仍然具有很好的对称性, 且其支撑区域仍为 $[0,1]$ 。它的频域局域化特征要优于 Haar 子波。

2.2 三角形类 Haar 子波

$$\psi_T(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t < 1/4 \\ 2 - 4t, & 1/4 \leq t < 3/4 \\ 4t - 4, & 3/4 \leq t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

三角形类 Haar 子波也具有很好的对称性, 其支撑区域仍为 $[0,1]$ 。它的频域局域化特征同样优于 Haar 子波。

2.3 n 阶 Haar 子波

对 Haar 子波函数 $\psi_H(t)$ 与 Haar 尺度函数 $\varphi_H(t)$ 进行卷积, 得到:

$$\psi(t) = \psi_H(t) * \varphi_H(t) = (\varphi_H(2t) - \varphi_H(2t-1)) * \varphi_H(t) \quad (10)$$

其中 $*$ 表示卷积。对其进行时域压缩变换, 使其与 Haar 子波函数具有相同的支集, 并进行能量归一化, 得到:

$$\psi_{H2}(t) = k\psi_H(2t) * \varphi_H(2t) = k(\varphi_H(4t) - \varphi_H(4t-1)) * \varphi_H(2t) \quad (11)$$

其中 k 为能量归一化系数。定义 $\psi_{H2}(t)$ 为二阶 Haar 子波。 n 阶 Haar 子波函数 $\psi_{Hn}(t)$ 定义为:

$$\psi_{Hn}(t) = k\psi_H(nt) * \underbrace{\varphi_H(nt) * \dots * \varphi_H(nt)}_{n-1 \uparrow} = k(\varphi_H(2nt) - \varphi_H(2nt-1)) * \underbrace{\varphi_H(nt) * \dots * \varphi_H(nt)}_{n-1 \uparrow} \quad (12)$$

其中 k 为能量归一化系数, $n \geq 1$, 且为整数, $*$ 表示卷积。

下面列出三阶类 Haar 子波数学表达式:

$$\psi_{H3}(t) = k \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t < 1/6 \\ -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{36}, & 1/6 \leq t < 1/3 \\ -t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{12}, & 1/3 \leq t < 1/2 \\ t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{5}{12}, & 1/2 \leq t < 2/3 \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{7}{36}, & 2/3 \leq t < 5/6 \\ -\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2}, & 5/6 \leq t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (13)$$

n 阶 Haar 子波由 Haar 子波函数与 $n-1$ 个 Haar 尺度函数进行卷积得出, 从图 2 可以看出, n 阶 Haar 子波光滑性明显增强, 而且保留了 Haar 子波的对称性和支撑区域, 但其频域局域化特征得到了优化。

3 类 Haar 子波性质分析

3.1 正交性

因为 3 种类 Haar 子波函数, 支撑区域均为 $[0,1]$,

所以都满足整数平移正交性条件。

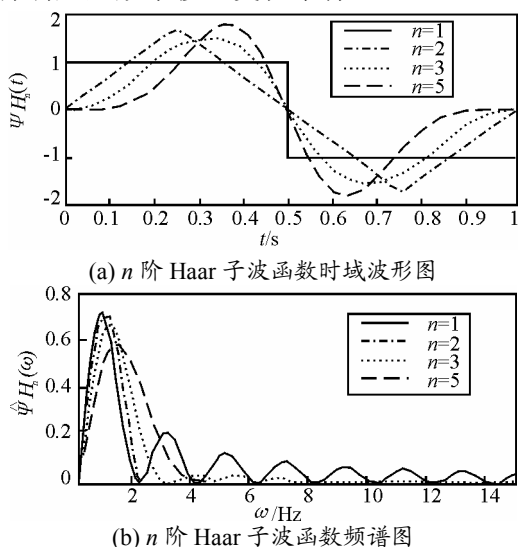


图2 n 阶 Haar 子波函数时域波形及频谱图

$$\langle \psi(t-k), \psi(t-l) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-k)\psi(t-l)dt = \delta_{k,l} \quad (14)$$

其中 $k, l \in Z$ 。

但不满足式

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2^{j/2} \psi(2^j t - k) 2^{i/2} \psi(2^i t - l) dt = \delta(k-l)\delta(j-i) \quad (15)$$

在不同尺度下 3 种子波函数都不是正交的。

3.2 正则性与消失矩

正则性一般用来刻画函数的光滑程度, 正则性越高, 函数的光滑性越好。下面用赫尔德连续性来度量类 Haar 子波函数的局部正则性^[11]。

定义 1 (赫尔德连续性) 假设 $\phi: R \rightarrow C$ 并且设 $0 < \alpha \leq 1$ 。那么, 函数 ϕ 是 α 阶赫尔德连续的, 如果存在一个常数 c , 使得

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad \text{对所有 } x, y \in R \quad (16)$$

定义 2 (赫尔德正则性) 假设 $\phi: R \rightarrow C$ 是 $r = P + \alpha (0 < \alpha \leq 1)$ 阶正则的, 如果 $\phi \in C^P$ 并且它的 P 阶导数是 α 阶赫尔德连续的。

设 $x = y + dx; dx \rightarrow 0^+$;

对于 Haar 子波, 当 $x=1/2$ 有:

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq c|x - y|^\alpha \Rightarrow 2 \leq c|dx|^\alpha \Rightarrow c \geq \frac{2}{|dx|^\alpha} = +\infty$$

类 Haar 子波在区间 $[0,1]$ 中都是可微的, 有:

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(y)| &\leq c|x - y|^\alpha \Rightarrow c \geq \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\Rightarrow c \geq \frac{|\psi'(x)(x - y)|}{|x - y|^\alpha} = |\psi'(x)||dx|^{1-\alpha} \end{aligned}$$

当 $0 < \alpha \leq 1$, 存在常数 c 。

在区间 $[0,1]$ 中, Haar 子波不是赫尔德连续的, 但类 Haar 子波函数是赫尔德连续的。因为在区间中正弦类 Haar 子波的无穷次可微, 三角形类 Haar 子波一次可微, n 阶类 Haar 子波 $n-1$ 次可微。所以在区间中, 正弦类 Haar 子波是无穷阶正则的, 三角形类 Haar 子波是二阶正则的, n 阶类 Haar 子波是 n 阶正则的。

而对这 3 种类 Haar 子波, 仅当 $k=0$ 时, 下式成立:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad (17)$$

所以类 Haar 子波仅有 1 阶消失矩^[12]。

3.3 类 Haar 子波与 Haar 子波时频特征比较

对 Haar 子波、正弦类 Haar 子波、三角形类 Haar 子波及三阶类 Haar 子波的时频特征进行比较, 其时域波形及频谱图如图 3。

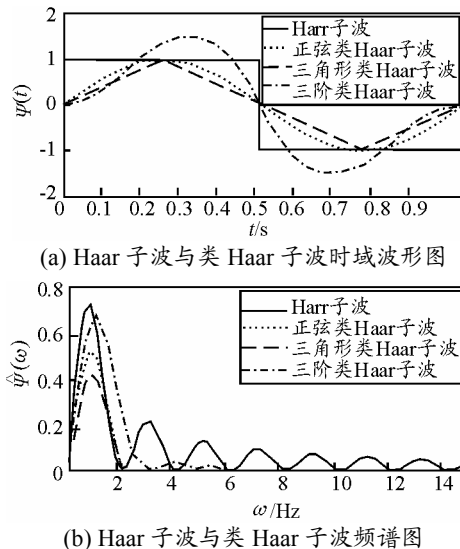


图3 Haar 与类 Haar 子波函数时域波形及频谱图

由 Haar 子波函数频域波形可以看出, 其频率衰减较慢, 频域局域化特征不够理想, 分析信号时其谐波会产生图 1 所示的误差。而正弦类 Haar 子波、三角形类 Haar 子波的频率局域化性能要明显优于 Haar 子波。 n 阶 Haar 子波随着 n 的增大, 其频率衰减性能变好, 从频域波形图可以看出当 $n=3$ 时, 频域衰减性已明显优于其他。

4 仿真分析

为分析广义 Haar、类 Haar 子波与 Haar 子波在信号分析中的不同, 笔者先选取单频信号对其进行子波变换, 从理论上研究几种子波变换结果的不同。然后选取在脉冲压缩体制雷达中常用的线性调频 (LFM) 信号和在国内外典型中低轨卫星测控体制

中常用的 BPSK（二相键控）调制信号，对这 2 种信号进行连续子波变换，分析在实际应用中广义 Haar 子波、类 Haar 子波与 Haar 子波信号分析的性能。

4.1 实验 1

以频率 1 Hz，采样频率为 50 Hz 的单频信号为例，对其进行 Haar、广义 Haar 及类 Haar 连续子波分析。

对单频信号进行类 Haar 子波进行连续子波分析时，边缘效应所引起的误差仍然存在，但 Haar 子波函数的频域特性所导致的上方次亮部分，得到了明显改善，而由于广义 Haar 子波函数的频域特征与 Haar 子波相同，所以在信号分析中没有太大区别。从图 4 可见，在几种类 Haar 子波中， n 阶 Haar 子波分析结果最佳，正弦类 Haar 子波和三角形类 Haar 子波在分析信号时，谐波影响仍然存在，而 n 阶 Haar 子波当阶数 $n \geq 5$ 时，频域衰减所导致的大尺度下的误差已基本消除。表 1 列出了不同阶数的 n 阶 Haar 子波对单频信号进行子波分析时 cpu 的运行时间，随着阶数的增加运算复杂度也随之增加。

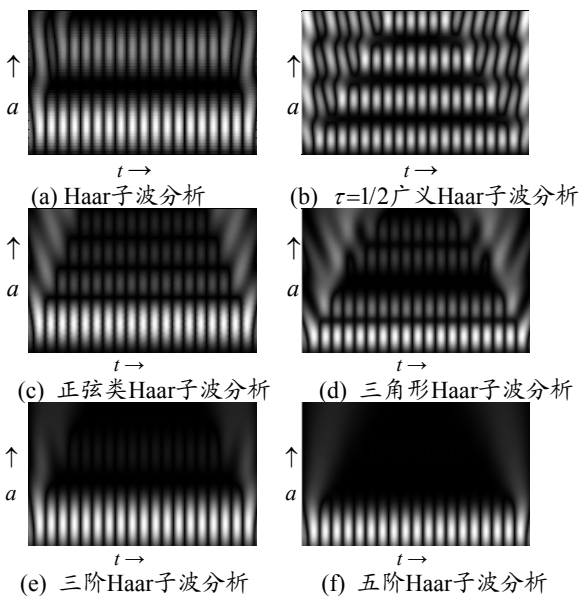


图 4 单频信号的几种子波分析结果比较

表 1 n 阶 Haar 子波对单频信号进行分析时 cpu 运算时间

n 阶 Haar 子波阶数 n	3	4	5	6	7	8
cpu 运行时间 t/ms	250	312	390	468	546	687

4.2 实验 2

线性调频 (LFM) 信号是脉冲压缩体制雷达中广泛使用的大时宽带宽积信号^[6]，它的突出优点是匹配滤波器对回波信号的多普勒频移不敏感，因此，

线性调频信号是现代高性能雷达体制经常采用的信号波形之一。笔者以载波频率 1 Hz，采样频率为 50 Hz 的线性调频信号为例，对其进行 Haar、广义 Haar 及类 Haar 连续子波分析。

由图 5 可见，在对线性调频信号进行连续子波分析时，五阶 Harr 子波分析结果可以明显看出信号频率的线性变化规律，可通过提取各个扫描时间的最大值所对应的尺度，计算出信号的频率变化对信号进行解调。而广义 Haar 子波及另 2 种 Haar 子波由于其谐波影响，分析结果稍差于 n 阶 Harr 子波。

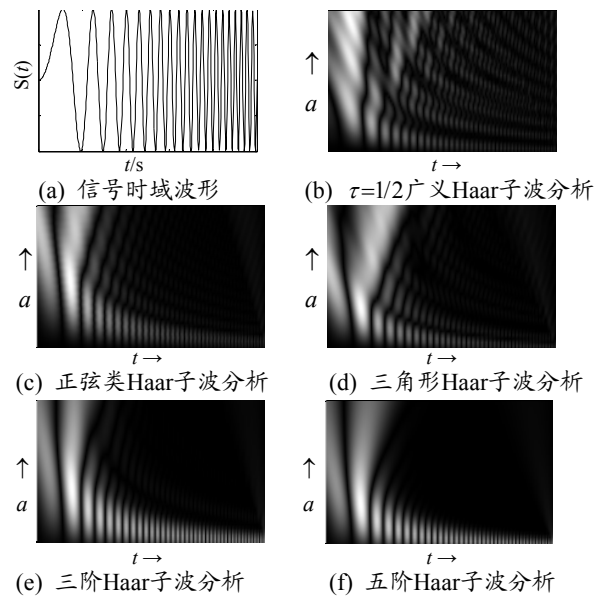


图 5 线性调频信号的几种子波分析结果比较

4.3 实验 3

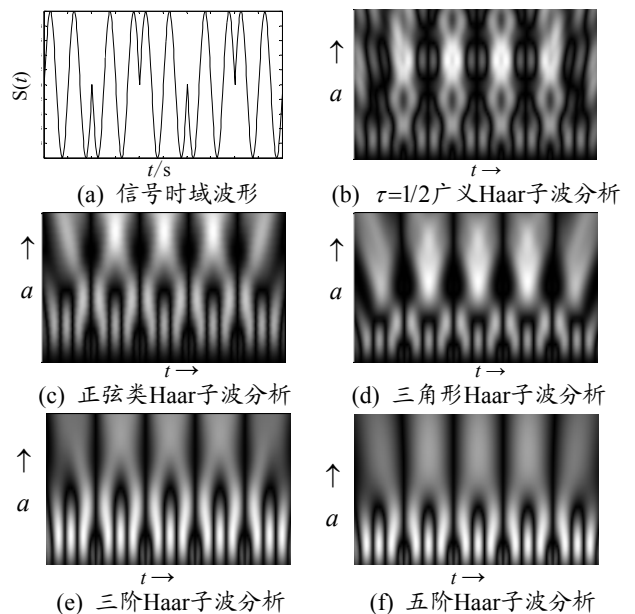


图 6 BPSK 调制信号的几种子波分析结果比较

国内外典型中低轨卫星测控体制中，常用的调制信号一般包括 PM（调相）、BPSK（二相键控）、

QPSK (四相键控) 等^[7]。笔者以载波频率 1 Hz, 采样频率为 50 Hz 的 BPSK 调制信号为例, 对其进行 Haar、广义 Haar 及类 Haar 连续子波分析。

由图 6 对线性调频信号进行连续子波分析的仿真结果可以看出, 五阶 Harr 子波分析结果可以清晰地分辨出信号相位的变化, 可以通过计算各个扫描时间的平均值, 从而得到相位变化的时间对信号进行解调, 而广义 Haar 子波及另 2 种 Haar 子波的分析效果要差于 n 阶 Harr 子波, 尤其从广义 Haar 子波分析结果中, 很难分辨出信号相位变化的时刻。

5 结束语

Haar 子波与广义 Haar 子波在频域局域化存在不足, 类 Haar 子波保留了其对称性, 紧支撑性优点, 在频域衰减性上明显优于 Haar 子波。虽然类 Haar 子波较之 Haar 子波在正则性上有所改善, 但与 Haar 子波一样没有较高的消失矩, 并且正交性能下降。在实际应用中, 类 Haar 子波能够减小 Haar 子波分析信号时大尺度下的误差, 在几种类 Haar 子波中, n 阶 Haar 子波分析结果最佳, 并且在 LFM 和 BPSK 调制信号分析时明显优于 Haar 小波。而且 n 越大, 在尺度方向上子波变换的能量聚集越大, 其分析结果越理想, 但由于其复杂度也随之增加, 一般 n 取 3~5。下一步, 还需进对类 Haar 子波进行研究, 进一步减小误差。

(上接第 52 页)

3.7 可维修性

可维修性设计使设备的部件便于生产、装卸、测试和维修。在设计中按结构和功能要求把整个设备分成八路充电、两路放电、两路加温、测控等几个单元进行设计, 既达到上述目的, 又便于整套设备故障的隔离、排除和替换不合格元器件。

3.8 产品安全性

在对电池组充放电过程中, 对发生电池接反、过流、过压、恒压分流电路短路、断路、放电电流冲击等故障状态失效模式做了防护性设计, 保障了电池组在测试过程中安全。

对软件进行了操作安全设计, 操作手通过人机交互界面对设备进行操作时, 必须严格地按照软件规定的操作顺序操作, 否则操作将不会被响应。当正确的操作过程进行到关键环节时, 软件会给出带有详细信息的对话框供操作手对参数设置和所做操作进行确认。当一个完整的操作流程进行完毕后, 软件将自动禁用已经正确操作过的参数设置项, 防止在软件运行过程中对该项的误操作。软件中针对关键参数的设置采用载入相关流程设置文件的方

参考文献:

- [1] Daubtechies I. Ten lectures on wavelets[M]. Philadelphia: CBMSNSF Series in Applied Math SLAM Publ, 1992.
- [2] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 程正兴, 译. 西安: 西安交通大学出版社, 2005.
- [3] 熊淑华, 袁晓, 沈杰. MPSK 信号小波变换过零特征分析[J]. 四川大学学报, 2005, 37(4): 124-128.
- [4] 王乐, 顾学迈, 王永建. MPSK 基于小波分析的卫星测控信号盲识别算法[J]. 南京理工大学学报, 2006, 30(6): 729-732.
- [5] 欧鑫, 黄小蔚, 袁晓. 类 Haar 小波与数字信号调制识别[J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2004, 36(4): 95-98.
- [6] 马晓岩, 向家彬, 等. 雷达信号处理[M]. 长沙: 湖南科技出版社, 1999.
- [7] 陈宜元. 卫星无线电测控技术[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2007.
- [8] 袁晓, 陈向东. 广义 Haar 子波[J]. 电子科技大学学报, 2002, 31(1): 19-23.
- [9] 袁晓, 陈向东. 经典规范正交子波的一种简单广义化方法及其应用[J]. 电子与信息学报, 2002, 24(12): 1870-1878.
- [10] 袁晓, 陶青川, 何小海. 广义 Battle-Lemarie 子波[J]. 电子学报, 2003, 31(2): 271-275.
- [11] C.Sidney Burrus, 等. 小波与小波变换导论[M]. 程正兴, 译. 北京: 机械工业出版社, 2008.
- [12] Mallat. 信号处理的小波导引[M]. 杨力华, 译. 北京: 机械工业出版社, 2007.

式, 规避了关键参数人工临场设置时可能产生误操作。软件对硬件进行关键参数设置时, 参数的设置值将被严格限制在硬件容许范围内, 避免由于参数设置超限对设备和电池的损坏。操作手的关键性操作都有相应的状态指示, 避免由于操作手的重复动作给设备和电池带来的冲击。

4 结束语

该设备已进行了充分的软件评测、应用模式测试和故障模式测试, 并已通过了出厂测试、发射场补充测试、软件测试以及实际任务的使用和检验。结果证明, 该设备主要性能指标满足产品要求, 能够满足航天任务中电池充放电的使用要求, 并且可拓展在多个型号中使用。

参考文献:

- [1] 侯鹰. 虚拟仪器技术在常规靶场动态参数测试中的应用研究[D]. 南京理工大学硕士学位论文, 2001: 12-25.
- [2] 宋国明. 虚拟仪器测试技术应用综述[J]. 航空计量技术, 2002: 225.
- [3] 李庚. 近地告警计算机自动测试系统的研制[D]. 西北工业大学硕士学位论文, 2006: 22-27.