

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2011.01.002

# 基于改进的遗传算法与龙格库塔法的弹道求解方法

刘彦君

(国防科学技术大学 信息系统工程重点实验室, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 为提高火炮打击效能, 对基于改进的遗传算法与龙格库塔法的弹道求解方法进行研究。提出基于差分龙格库塔法的外弹道模型, 在目标点位置已知时, 可以精确求出与目标点共水平面的落点坐标。并提出了基于遗传算法的最佳射角求解方法, 动态缩小搜索范围, 运行参数自适应调整, 快速高效的求出火炮初射角参数。案例结果验证了该方法的可行性与有效性, 对于弹道解算研究具有一定的应用价值。

**关键词:** 遗传算法; 龙格库塔法; 最佳射角

**中图分类号:** TP301.6; N945.12 **文献标志码:** A

## A Method of Ballistic Based on Genetic Algorithm and Runge-Kutta

Liu Yanjun

(Key Laboratory of Information System Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** In order to improve hit potency of guns, this paper has researched the method of ballistic based on genetic algorithm and Runge-Kutta. Firstly advanced a ballistic model based on difference Runge-Kutta, which can accurately solved the coordinate of point of fall after gaining the information of target position. Then, put forward an algorithm of optimal angle of fire based on genetic algorithm, which decreased the search range dynamically and parameters adjusted by them. Ultimately, it calculated the optimal angle of fire. Meanwhile, proved the feasibility and validity by analyzing a case, the work has an important applied value for ballistic.

**Keywords:** genetic algorithm; Runge-Kutta; optimal angle of fire

### 0 引言

为提高战车火控系统性能, 有必要对火炮外弹道问题实时解算的理论与技术进行研究。由于受到初速、旋转角速度等诸多因素的影响, 弹丸在空中的飞行轨迹是一条非常复杂的空间曲线。高炮火控系统求解射击诸元的方法主要有 2 种: 一种是射表逼近方法, 另一种就是外弹道数值积分解法<sup>[1]</sup>。

目前, 外弹道模型已经比较成熟, 4D 及改进的 4D 外弹道模型<sup>[2]</sup>将弹丸在被动段飞行的特征描述得很完备, 可以解决绝大多数弹丸弹道的计算问题。外弹道的数值计算方法也较多, 王旭智提出的利用外弹道微分方程组实时快速解算高炮理论弹道的方法<sup>[3]</sup>, 王润岗提出的虚拟环境中坦克射击训练仿真系统<sup>[1]</sup>等效果都比较显著, 精度以及时间复杂度都令人满意, 但众多弹道解算方法主要围绕二维平面的弹道进行研究, 不利于大多数实际问题的解决。虽然有一些三维空间的弹道描述, 如周启煌提出的外弹道实时解算方法<sup>[4]</sup>, 孙幸福提出的高炮火控外弹道实时解算方法<sup>[5]</sup>等, 但是这些方法并没有从根本上解决求解火力点初射角的二元边界问题, 故提

出了基于改进的遗传算法与龙格库塔法的弹道求解方法。

### 1 基于改进龙格库塔法的外弹道模型

#### 1.1 弹道求解模型

首先, 假定火力点和目标点位置信息已知, 将求解数值积分的四阶龙格库塔方法与求解两点边值问题的差分方法融合起来, 对 4D 外弹道模型进行数值积分, 得到与目标点共水平面的落点坐标信息, 并作为遗传算法适应度函数的组成部分; 其次, 根据弹道的特点对遗传算法加以改进, 包括动态缩小搜索范围, 遗传算子的设计与和遗传参数的选定等, 使其更快反解出火力点的最佳射角。所描述的流程如图 1。

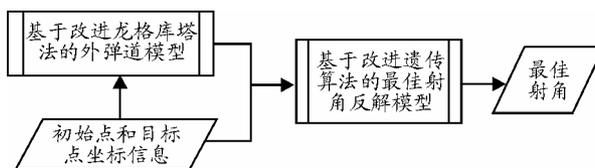


图 1 基于遗传算法与龙格库塔法的弹道求解模型

外弹道模型是由一组复杂的微分方程组成的,

收稿日期: 2010-07-02; 修回日期: 2010-08-13

基金项目: 国家自然科学基金 (70701038)

作者简介: 刘彦君 (1987-), 男, 河南人, 从事指挥信息系统研究。

由于无法得到具体弹丸位移的解析表达式，因此，笔者采用四阶龙格库塔法，通过数值积分达到求解目的；龙格库塔方法简单且精度很高，但一般采用定步长的积分策略，且无法解决两点的边值问题，因此，笔者将求解边值问题的差分方法融入到四阶龙格库塔方法中，使改进的数值积分方法可以快速高效地解决外弹道的边值问题，得到与目标点同水平面的弹丸落点坐标。

### 1.2 外弹道模型

外弹道模型是在已知射角、初速、转速、弹丸质量等初始条件下，综合考虑阻力、升力、重力、科氏力、马格努斯力，建立的质心运动方程，旋转方程，动力平衡角方程。

应用牛顿第二定律和动量矩定理，建立旋转稳定弹丸 4D 模型<sup>[2]</sup>：

质心运动方程为：

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\rho S}{2m} [F_D C_{D0} + C_{D\alpha} (\alpha_D^2 + \alpha_e^2)] \bar{V} + \frac{\rho S}{2m} F_L [C_{L\alpha} + C_{L\alpha^2} \alpha_e^2] V^2 \bar{\alpha}_e - \frac{\rho S d P}{4m} C_{y\alpha} (\bar{\alpha}_e \times \bar{V}) + \bar{g} + \bar{\Lambda}$$

旋转方程：

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{4J_x} \rho S d^2 V P C_{ip}, C_{ip} < 0$$

动力平衡角方程：

$$\bar{\alpha}_e = (\alpha_b - \alpha_a)(\bar{V} \times \bar{u}) - \alpha_b(\bar{V} \times \bar{g})$$

由于射角、初速等初始条件已知，运用四阶龙格库塔法可以方便地求出上述常微分方程组的数值解，得到一条弹道轨迹。

### 1.3 基于差分的龙格库塔方法

由于上述弹道轨迹是由一些间隔的空间点连接而成的，不能精确地得到与目标点共水平面的弹丸落点坐标，势必会对其后的优化算法带来不利影响。故对于该二阶微分方程的两点边值问题，采用差分方法与龙格库塔方法结合的形式，来达到求解目的。

由于已知条件为：

$$\begin{cases} Start : t=0, x=0, y=0, z=0, \bar{v} = \bar{v}_0 \\ End : z = z_{end} \end{cases}$$

式中  $x$ 、 $y$ 、 $z$  分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  坐标轴值， $z_{end}$  为求解的终止条件， $t$  为时间值， $\bar{v}$  为速度。可知该问题为第一边值问题，差分方法以差商代替导数，从

而把微分方程离散化为一个差分方程组，然后解此方程组，以它的解作为微分方程边值问题的近似解。则对于二阶微分方程：

$$\bar{Y}''(\bar{X}) = f(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Y}'), \bar{a} \leq \bar{X} \leq \bar{b}, |Y| < +\infty \quad (5)$$

式中  $\bar{X} = (x, y, z)$  为坐标系上任意一点到原点的向量， $\bar{Y}'$  为  $\bar{Y}$  一阶导数， $\bar{Y}''$  为  $\bar{Y}$  二阶导数， $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$  分别为上下界。

其差分方程为：

$$\begin{cases} \bar{Y}_{m+1} - 2\bar{Y}_m + \bar{Y}_{m-1} - h^2 f(\bar{X}_m, \bar{Y}_m, \frac{\bar{Y}_{m+1} - \bar{Y}_{m-1}}{2h}) = \bar{0} \\ \bar{Y}_0 = \bar{0}, \bar{Y}_N = (x, y, z) = (x, y, 0) \end{cases} \quad (6)$$

式中  $Y_m$  为应变变量第  $m$  个运算的值， $X_m$  为自变量第  $m$  个运算的值， $Y_0$  为起始条件， $Y_N$  为终止条件， $h$  为步长。这是一个非线性方程组，利用龙格库塔方法对该方程组进行迭代计算，在求解过程中采取变步长  $h$  计算。一般而言，采用一个相对较大的  $h$  值，等到逼近  $z=0$  时，再缩小  $h$  已达到所需的精确度。

如图 2，原方法平均用时  $t=0.008\ 265\ s$ ，改进后平均用时  $t=0.009\ 249\ s$ ，表明采用改进后的龙格库塔方法仅比原方法多花时  $0.001\ s$ ；如图 3，计算的位移的相对误差几乎为零，表明该方法可以精确地得到与目标点共水平面的弹丸落点坐标。因此，用  $0.001\ s$  的时间换取如此的高精度是值得的，效果显著，可作为下面遗传算法的适应度函数的组成部分对个体进行筛选。

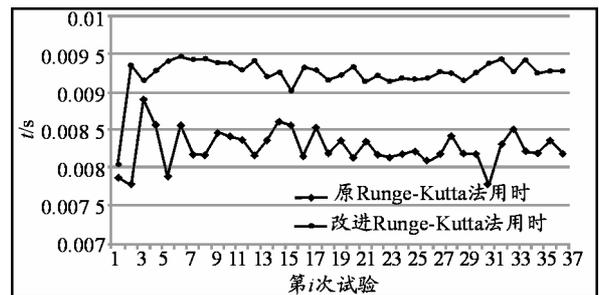


图 2 龙格库塔方法改进前后用时比较

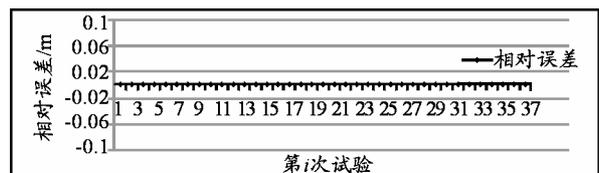


图 3 改进龙格库塔方法的误差

## 2 基于改进遗传算法的最佳射角反解模型

文献[4-5]虽提出了一些火力点初射角的反解

算法, 但仅局限于单个角度变量, 对水平、竖直方向两个变量就无法同时满足要求, 因此笔者提出基于遗传算法的最佳射角反解算法, 采用实数编码, 以基于改进龙格库塔法的外弹道模型为目标函数, 并依据弹道特征, 对变异方式、交叉方式, 选择策略进行合理设计, 对变异概率、交叉概率等参数进行合理选定, 以在时间与精度上达到满意效果。

### 2.1 基本遗传算法模型

遗传算法都具有并行计算能力, 但是在一台处理器上执行, 遗传算法也只能发挥隐形的并行计算能力, 因此采用遗传算法的分解型并行方法<sup>[7]</sup>对最佳射角进行高效搜索, 流程如图 4。

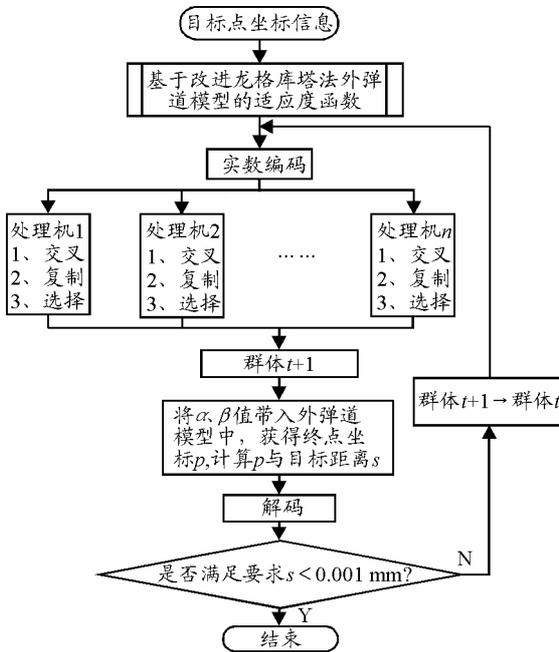


图 4 基于改进遗传算法的最佳射角反解模型

其基本执行过程如下<sup>[8]</sup>:

1) 初始化。确定种群规模 $N$ 、交叉概率 $P_c$ 、变异概率 $P_m$ 和置终止进化准则; 随机生成 $N$ 个个体作为初始种群 $X(0)$ ; 置进化代数计数器 $t \leftarrow 0$ ;

2) 个体评价。计算或估价 $X(t)$ 中各个体的适应度;

3) 种群进化。

(1) 选择: 从 $X(t)$ 中运用选择算子选择出 $M/2$ 对母体( $M \geq N$ ); (2) 交叉: 对选择的 $M/2$ 对母体, 依概率 $P_c$ 执行交叉形成 $M$ 个中间个体; (3) 变异: 对 $M$ 个中间个体独立依概率 $P_m$ 执行变异, 形成 $M$ 个候选个体。

4) 选择(子代): 从上述所形成的 $M$ 个候选个体中依适应度选择出 $N$ 个个体组成新一代种群 $X(t+1)$ 。

5) 终止检验。如已满足终止准则, 则输出 $X(t+1)$ 中具有最大适应度的个体作为最优解, 终止计算; 否则置 $t \leftarrow t+1$ 并转3)。

### 2.2 实数编码

对于多维、高精度要求的连续函数优化问题, 使用二进制编码来表示个体时将会带来不利之处<sup>[7]</sup>, 比如二进制编码存在连续函数离散化的映射误差, 也不便反映所求问题的特定知识。因此, 笔者采取实数编码方式, 对于处理弹道这类多决策变量的约束问题, 不仅改善了遗传算法的计算复杂度, 也提高了精确度。

### 2.3 动态缩小搜索范围的群体设计

群体是遗传算法进化的基础, 从某种程度上讲, 群体的性质决定了遗传算法的搜索能力。群体设计主要是对初始种群的产生和群体的大小进行分析设计。

动态缩小搜索范围可以使初始种群中的个体更接近最优解。对于某特定目标 $(x, y, z)$ , 根据经验可知, 其竖直方向上的射角 $\alpha \in (\arcsin(\sqrt{2s/g}), \arcsin(\sqrt{2s/g}) + 9)$ , 由旋转弹丸的偏流特性知水平方向上的射角 $\beta \in (\arcsin((x - \mu y) / y), \arcsin((x - \mu y) / y) + 4)$ 。这样可以动态减小搜索范围。初射角 $\alpha$ 、 $\beta$ 如图 5。

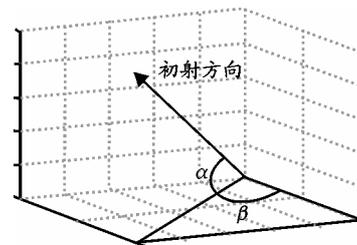


图 5 初射角 $\alpha$ 、 $\beta$

群体规模越大, 遗传算子处理的模式就越多, 进化为最优解的机会就越高, 但个体适应值与评估计算次数增加, 算法效率会显著下降。由于笔者的适应度函数是以落点距目标点的距离来衡量的, 全局仅有一个最优解, 所以遗传算法不会轻易陷入局部解。通过实验, 初始群体的规模在 30 个左右较为适宜。

### 2.4 适应度函数设计

适应度较高的个体遗传到下一代的概率较大, 采用落点与目标点的相对距离来度量个体的适应度, 距离越远, 适应度就越小, 距离越近, 适应度就越大。

针对本文的弹道问题，目标函数为：

$$\Delta S^2 = (x - x_{end})^2 + (y - y_{end})^2 + (z - z_{end})^2 \quad (7)$$

式中  $x_{end}$ 、 $y_{end}$ 、 $z_{end}$  分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  坐标轴的终止目标点。求  $\Delta S^2$  的最小值，用以下方法进行转换<sup>[10]</sup>：

$$\begin{cases} f(\alpha, \beta) = C_{max} - \Delta S^2, \Delta S^2 < C_{max} \\ 0, \alpha, \beta \text{ 为无效染色体} \end{cases} \quad (8)$$

式中  $f(\alpha, \beta)$  为适应度函数； $\Delta S^2$  为目标函数； $\alpha$ 、 $\beta$  分别为火炮发射的水平、竖直角； $C_{max}$  为某一固定的大值。

### 2.5 遗传算子设计

由于采用了实数编码方式，交叉算子采取算术交叉的方式，变异算子采用均匀变异方式，选择算子采用比例选择与最优保存相结合的策略。

1) 交叉算子。假设在 2 个  $X'_A$ 、 $X'_B$  个体之间进行算术交叉，则交叉运算后所产生的 2 个新个体是：

$$\begin{cases} X'_A{}^{t+1} = \alpha X'_B{}^t + (1 - \alpha) X'_A{}^t \\ X'_B{}^{t+1} = \alpha X'_A{}^t + (1 - \alpha) X'_B{}^t \end{cases} \quad (9)$$

式中  $\alpha$  为一参数。

2) 变异算子。笔者采用均匀变异，它使得搜索点可以在整个搜索空间内自由地移动，增加群体的多样性，使算法处理更多的模式。

3) 选择算子。经常用到的选择策略有比例选择方法、最优保存方法、期望值方法等。笔者采用比例选择与最优保存相结合的策略。比例选择方法中每个个体的选择概率和其适应度值成比例。虽然适应度值高的个体被选择的概率大，但是仍有机率导致最优个体被淘汰，所以将比例选择方法和最优保存方法相结合，将每代中最优的个体直接替代最劣的个体，以保证遗传算法向最优的方向进化<sup>[10]</sup>。

### 2.6 运行参数选定

交叉概率  $P_c$  和变异概率  $P_m$  的选择是影响遗传算法行为和性能的关键<sup>[11]</sup>。 $P_c$  控制着个体交叉的速率， $P_m$  控制着个体变异的速率。针对弹道求解的优化问题，反复实验来确定  $P_c$  和  $P_m$ ，不仅工作繁琐，而且很难找到适应于每个解的最佳值。文献[12]提出在自适应遗传算法，该算法中  $P_c$  和  $P_m$  依据个体的适应度来自适应地进行改变。同时，对于适应度高于群体平均适应度的个体，对应于较低的  $P_c$

和  $P_m$ ，使该解得以进入下一代；而低于平均适应度的个体，相对应于较高的  $P_c$  和  $P_m$ ，使该解被淘汰掉。因此，自适应的  $P_c$  和  $P_m$  能够提供相对某个解的最佳  $P_c$  和  $P_m$ ，有效地保证了遗传算法的收敛能力，有效地提高了遗传算法的优化能力。

## 3 案例分析

根据现有资料，以一辆位于坐标原点的某 122 mm 型坦克炮为例，对最佳射角，位移误差，进化代数等分析讨论，验证本模型。

射击初始条件如表 1。

表 1 射击初始条件

参数	数值
火力点坐标 $A$	(0, 0, 0)
目标点坐标 $T$	(100, 4 000, 0)
初速 $v/m \cdot s^{-1}$	897
弹丸直径 $d/mm$	122

以上述初始条件为基础，以种群设计，算子设计，参数设计为考察对象，进行多组实验。由于改进的龙格库塔法是算法流程中的基础，并且在文章的 1.2 部分已经充分说明了本方法的有效性与精确性，因此，案例仅对改进的遗传算法进行讨论。试验中，采用算术交叉，均匀变异方式， $P_c$ 、 $P_m$  以自适应方式动态变化，搜索范围依据不同问题动态改变，由于  $P_c$ 、 $P_m$  以自适应方式动态变化对遗传代数和计算精度的影响在文献[11-12]中有详细介绍，不再赘述，本例重点研究了动态缩小搜索范围的种群设计对遗传代数和计算精度的影响。如表 2，动态缩小搜索范围使初始种群的个体较密集的分布在可行域中，进化代数、运行时间显著减少，在有限的时间内精度明显较高。

表 2 初始种群设计效果

遗传代数	动态缩小搜索范围 $\Delta S/m$	固定搜索范围 $\Delta S/m$
1	70.201 8	35 991
2	37.817 1	28 677.2
3	60.507 3	6 707.96
4	13.230 4	9 620.05
5	3.211 4	76.015 4
6	0.087 908 7	16.577 8
7	0.089 061	1.003 23
8	0.057 065 1	2.738 22
9	0.012 160 3	3.469 97
10	0.006 473 2	1.265 91
11	0.005 386 5	0.251 563
12	0.000 679	0.148 090 5
13	5.88E-05	0.048 497 5
14	2.76E-05	0.009 66
15	7.23E-05	0.003 144 9
16	7.14E-05	0.006 665 2
17	7.13E-05	0.000 924 8
18	7.13E-05	0.000 710 8
19	7.13E-05	0.000 237 1

射击结果如表 3。

(下转第 24 页)

输出流。

在空袭持续时间内，弹炮结合武器系统杀伤巡航导弹的数学期望

$$E_M = \lambda t P_S$$

### 4 实例计算

假设空袭目标入侵密度  $\lambda=10$  枚/min, 持续时间 12 min, 弹炮结合武器系统中地空导弹武器系统有 6 个目标通道, 在其杀伤区纵深可对目标拦截 2 次,  $t_{dfw1}=120$  s,  $t_{dfw2}=60$  s,  $P_{dl}=0.7$ ; 高炮系统有 4 个目标通道, 在其杀伤区纵深内可对目标点射 2 次,  $t_{gfw1}=12$  s,  $t_{gfw2}=10$  s,  $P_{gl}=0.3$ 。计算该弹炮结合武器系统射击效率。

利用模型进行求解, 经计算  $\lambda_{gO2}=3.5228$  枚/min,

$$P_S = 1 - \frac{\lambda_{gO2}}{\lambda} = 0.6477, E_M = 77.72 \text{ 枚。}$$

\*\*\*\*\*

(上接第 7 页)

表 3 火力点 A 射击结果

参数	数值
竖直角 $\alpha/^\circ$	7.743 7
水平角 $\beta/^\circ$	1.413 1
最高点 $h/m$	239.1
与目标距离 $d/m$	4 001.2
总误差/m	0.000 1

射击效果如图 6。

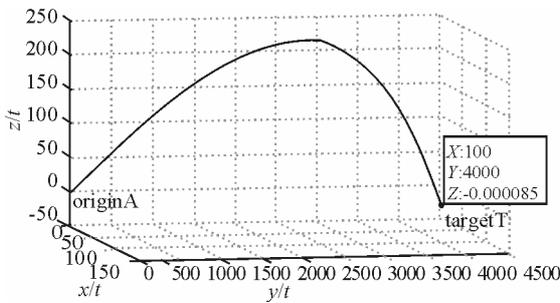


图 6 射击效果图

通过本例分析, 可知该方法确实高效实用, 为弹道研究提供了一种新的思路。

### 4 结束语

1) 该方法不仅弹道精确, 而且对火力点的最佳射角解算高效, 在多处理机并行计算的情况下平均需要 0.1 s 就可以完成求解任务; 2) 该方法针对弹道解算问题, 对龙格库塔方法与基本遗传算法的改进切实有效, 无论是时间还是精度都有显著改善; 3) 该方法是一种弹道反解的通用算法, 对模型中的

### 5 结束语

该模型较易通过计算机编程实现, 对优选火力运用方案、充分发挥弹炮结合武器系统的作战效能, 具有一定的理论意义和实践价值, 为反巡航导弹作战理论研究及弹炮结合武器系统仿真系统的开发奠定了基础。

### 参考文献:

[1] 甘应爱. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005(6): 312-314.  
 [2] 毛和瑞, 常云丽, 萧元星. 弹炮一体化防空系统的服务概率模型[J]. 火力与指挥控制, 2001, 26(3): 17-18.  
 [3] 陈立新. 防空导弹网络化体系效能评估[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007: 243.  
 [4] 官建成. 随机服务过程及其在管理中的应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1993: 143.

参数进行合理设置后方可使用, 并且算法简洁, 易于编程实现。

### 参考文献:

[1] 王润岗, 花传杰, 韩志军, 等. 虚拟环境中坦克射击训练仿真系统[J]. 火力与指挥控制, 2007, 32(1): 88-90.  
 [2] 闫章更. 射表编拟技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.  
 [3] 王旭智, 孙中森, 宋建中. 利用外弹道微分方程组实时快速解算高炮理论弹道的研究[J]. 电子器件, 2007, 30(6): 2297-2300.  
 [4] 周启煌, 于谅, 邱晓波. 战车火控外弹道实时解算的研究[J]. 火力与指挥控制, 2001, 26(4): 14-18.  
 [5] 孙幸福, 狄邦达. 高炮火控外弹道实时解算及其应用[J]. 火力与指挥控制, 2007, 32(5): 110-112.  
 [6] 黄云清, 舒适, 陈艳萍. 数值计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2009.  
 [7] 周明, 孙树栋. 遗传算法原理及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.  
 [8] 葛继科, 邱玉辉, 吴春明, 等. 遗传算法研究综述[J]. 计算机应用研究, 2008, 25(10): 2911-2916.  
 [9] 赵青. 遗传算法三种编码策略的比较研究[J]. 微型电脑应用, 2008, 24(5): 47-49.  
 [10] 李培志, 樊丁. 基于实数编码的改进遗传算法研究[J]. 宇航计测技术, 2008, 28(1): 54-57.  
 [11] 曹棕焱, 李光布, 李景辉. 遗传算法的分析及其改进[J]. 计算机仿真, 2009, 26(7): 228-231.  
 [12] M Srinivas, L M Patnaik. Adaptive Probabilities of Crossover and Mutation in Genetic Algorithm [J]. IEEE Trans on SMC, April, 1994, 24(4).  
 [13] 钟晓声, 李应歧. 一种基于遗传算法的防空导弹火力分配优化方法[J]. 四川兵工学报, 2009(7): 20-24.