

doi: 10.7690/bgzdh.2026.06.007

考虑多源不确定性的空间驱动部件传动误差预测与敏感性分析

李业正¹, 巩浩^{1,2}, 刘检华^{1,2}, 王骁¹, 王瑞祥¹, 李云³(1. 北京理工大学机械与车辆学院, 北京 100081; 2. 北京理工大学唐山研究院, 河北 唐山 063015;
3. 北京卫星制造厂有限公司, 北京 100094)

摘要: 针对空间驱动部件装配及服役过程中的多源不确定性, 引入基于区间理论的非概率分析方法。建立空间驱动部件有限元模型, 结合装配/服役过程仿真获取传动误差预测数据。利用区间变量及多维椭球模型表征多源不确定性装配误差之间的相关性及不确定性域, 通过代理模型建立传动误差的极限状态函数, 基于非概率可靠性理论对系统进行可靠性及灵敏性分析。引入区间过程模型, 通过 $K-L$ 展开对服役过程振动不确定性进行抽样, 利用抽样样本反求传动误差的区间过程, 进行时变可靠性与敏感性分析。研究表明: 空间驱动部件装配过程中的非概率可靠性指标 ($\eta=0.97$) 显示系统存在失效风险, 其对凸轮 x 轴偏心误差的敏感性最高; 空间驱动部件服役过程中, 时间相关长度显著影响传动误差的波动范围, 空间驱动部件传动误差边界为 $118''\sim 123''$, 时变可靠性指标说明传动误差在第 1 s 处有可能出现超过限定值的情况。

关键词: 不确定性; 非概率可靠性; 敏感性分析; 区间变量; 区间过程

中图分类号: TP301.6; TH132 **文献标志码:** A

Prediction and Sensitivity Analysis of Transmission Error for Spatial Drive Mechanisms Considering Multi-source Uncertainties

Li Yezheng¹, Gong Hao^{1,2}, Liu Jianhua^{1,2}, Wang Xiao¹, Wang Ruixiang¹, Li Yun³(1. *School of Mechanical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;*
2. *Tangshan Research Institute, Beijing Institute of Technology, Tangshan 063015, China;*
3. *Beijing Spacecraft Manufacturing Co., Ltd., Beijing 100094, China*)

Abstract: Aiming at the multi-source uncertainties in the assembly and service process of spatial drive components, a non-probabilistic analysis method based on interval theory is introduced. A finite element model of the spatial drive component is established, and transmission error prediction data are obtained through assembly/service process simulation. Interval variables and a multidimensional ellipsoidal model are employed to characterize the correlation and uncertainty domain among multi-source uncertain assembly errors. A surrogate model is constructed to formulate the limit state function of the transmission error, based on which reliability and sensitivity analyses of the system are performed using non-probabilistic reliability theory. An interval process model is introduced, and the Karhunen-Loève (K-L) expansion is utilized to sample the vibration uncertainty during the service process. The sampled data are then used to inversely determine the interval process of the transmission error, enabling time-varying reliability and sensitivity analyses. The results indicate that the non-probabilistic reliability index ($\eta=0.97$) during the assembly process of the spatial drive component reveals a potential risk of failure, with the highest sensitivity observed to the cam eccentricity error along the x -axis. During the service process, the correlation time length significantly affects the fluctuation range of the transmission error. The bounds of the transmission error of the spatial drive component are $118''\sim 123''$. The time-varying reliability index suggests that the transmission error may exceed the allowable limit at the 1-second mark.

Keywords: uncertainty; non-probabilistic reliability; sensitivity analysis; interval variable; interval process

0 引言

空间驱动部件作为航天器的重要组成部分, 常被用于姿态调整、轨道控制和位置保持等, 其性能直接决定了航天器的寿命和可靠性^[1-3]。在部件加工精度满足要求且趋于极限的情况下, 装配成为影响空间驱动部件性能的关键因素, 装配精度直接影响航天器高精度、高可靠在轨运行^[4-5]。

空间驱动部件的装配精度受材料特性、几何结构、装配工艺等多源不确定性因素的影响, 这些不确定因素在装配过程中耦合、传递、放大, 最终导致同批次产品的装配一致性以及系统可靠性存在较大差异^[6-7]。Velex 等^[8]通过实验证实, 齿形制造误差和装配偏差都会显著恶化齿轮系统的动态性能表现; Jia 等^[9]的研究则表明, 谐波减速器在加工和装

收稿日期: 2024-12-09; 修回日期: 2025-01-10

基金项目: 国防基础科研项目 (JCKY2022203C024)

第一作者: 李业正 (2003—), 男, 山东人, 博士。

配过程中产生的几何误差是导致其工作振动加剧的主要原因。Li 等^[10]发现装配误差与磨损共同作用会增大谐波减速器回差,从而恶化传动误差;Yang 等^[11]提出的 RV 减速器运动等效模型揭示了装配误差会诱发并放大旋转传动误差。

空间驱动部件在轨服役期间,会受到温度、振动、负载等因素影响,这些环境因素通过多种机制耦合作用,导致传动精度退化,进而影响航天器的可靠性与寿命。Li 等^[12]搭建了高低温试验装置,在真空环境下测试了不同温度、转速及负载下的空间驱动机构传动精度,研究结果表明传动精度随温度升高而下降,在-35 ℃至 65 ℃的范围内,传动精度降低约 15%。李振等^[13]的研究表明运动机构长期在轨服役过程中,空间辐射会破坏自润滑涂层或材料的微观结构,导致摩擦系数升高、磨损加速,进而引起齿轮啮合刚度下降。Li 等^[14]通过建立 10 自由度非线性动态模型,分析了振动加速度、冲击对空间驱动系统高负载齿轮传动误差的影响,研究结果表明振动环境通过时变刚度和齿隙加剧传动误差。Wang 等^[15]在真空低温环境下长期运行谐波减速器,监测传动误差、回差及效率,研究结果表明谐波减速器在真空下易出现润滑膜破裂,导致金属直接接触,增加摩擦和空程回差,降低传动精度。

目前,不确定性分析理论已经被广泛应用于机械传动领域,常用的方法有概率方法^[16-18]和模糊方法^[19]等。在工程实践中,概率和模糊方法需要通过复杂的数据采集和统计验证才能建立,但在机械系统中通常面临小样本或数据样本不足的问题^[20],不仅显著增加了研究成本,而且在数据获取受限的情况下可能直接导致方法失效。相比于上述 2 种方法,基于区间理论的非概率方法在数据匮乏场景下展现出明显的应用优势,该方法仅需确定参数波动范围的上下边界,这种边界信息的获取可通过简单的工程测量或专家经验确定,对数据完备性和样本规模的依赖性显著降低,特别适用于早期研发阶段和复杂工况环境^[21]。目前,受限于样本数据,针对空间驱动部件装配及服役过程中的多源不确定性分析,缺乏系统研究,无法对装配误差及可靠性优化提供支撑。

笔者针对空间驱动部件装配及服役过程中的多源不确定性展开系统分析:首先,建立空间驱动部件有限元模型,构建不确定条件下的数据集;其次,针对多源装配误差导致的空间驱动部件传动误差不

确定性,基于区间理论表征装配误差参数之间的相关性,构建其不确定性域,利用代理模型揭示不确定性传递规律,并分析装配误差参数对可靠性的敏感性;最后,采用区间过程模型表征空间驱动部件服役过程中的振动不确定性,利用 *K-L* 展开进行区间过程抽样及反求,进而分析了随机振动下空间驱动部件可靠性及传动误差敏感性。

1 有限元建模及装配/服役过程仿真

本文中空间驱动部件主要由行星减速器和谐波减速器构成,其几何模型如图 1 所示,部分结构参数如表 1 所示。

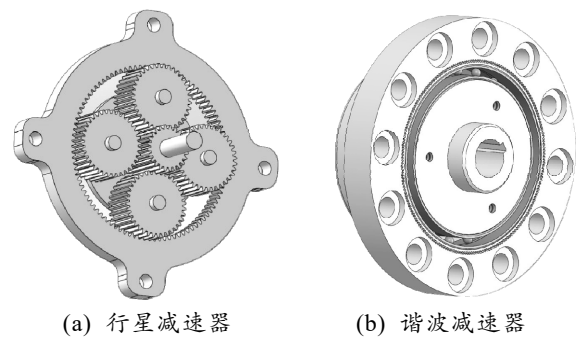


图 1 空间驱动部件关键部件模型

表 1 空间驱动部件部分结构参数

参数名称	计算公式	数值
太阳轮模数 m^p/mm	—	0.500 0
太阳轮压力角 $\alpha^p/(^\circ)$	—	20.000 0
太阳轮齿数 z_s^p	—	24.000 0
齿圈齿数 z_r^p	—	96.000 0
行星轮齿数 z_p^p	—	36.000 0
太阳轮分度圆直径 d_s^p/mm	$m^p Z_s^p$	12.000 0
齿圈分度圆直径	$m Z_r^p$	48.000 0
行星轮 d_p^p/mm	$m^p Z_p^p$	18.000 0
分度圆直径		
柔轮模数 m_f^h/mm	—	0.200 0
柔轮齿数 z_f^h	—	200.000 0
柔轮分度圆直径 d_f^h/mm	$m_f^h z_f^h$	40.000 0
刚轮齿数 z_r^h	—	202.000 0
刚轮分度圆直径 d_r^h/mm	$m_r^h z_r^h$	40.400 0
凸轮长半轴 a_w^h/mm	—	16.950 0
凸轮短半轴 b_w^h/mm	—	16.548 8

第 1 级行星减速器采用齿圈固定、太阳轮输入、保持架输出的传动形式;第 2 级谐波减速器采用刚轮固定、波发生器输入、柔轮输出的传动形式。行星减速器的保持架通过键连接与谐波减速器的波发生器进行装配,进一步通过柔轮弹性变形减速增扭,将动力输出,根据定轴轮系传动比公式,空间驱动

部件的整体减速比为：

$$i_{13} = -\frac{z_f^h(z_s^p + z_r^p)}{z_s^p(z_r^h - z_f^h)} \quad (1)$$

式中： z_s^p 为太阳轮齿数； z_r^p 为齿圈齿数； z_f^h 为柔轮齿数； z_r^h 为刚轮齿数。第 1 级行星减速器的传动比为 5，第 2 级谐波减速器的传动比为 100，整个空间驱动部件传动比为 500。

对空间驱动部件进行有限元建模，如图 2 所示。

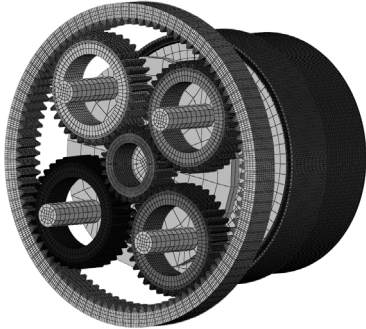


图 2 空间驱动部件有限元网格模型

建模时为了提高计算效率，对实际的几何模型进行了适当简化，包括去除太阳轮输入轴，简化齿圈固定孔、凸轮倒角、柔轮和刚轮安装孔，以及减少刚轮外径等。

装配过程仿真分为 3 个子步：1) 0~1 s 模拟波发生器装配，仅通过凸轮和柔轮的接触设置使得柔轮被撑开；2) 1~2 s 模拟太阳轮旋转 0~90° 的动态运动过程；3) 2~3 s 模拟 90°~180° 的动态运动过程。

服役过程仿真分为 20 个载荷步，每个载荷步施加相应的位移载荷模拟太阳轮旋转 0~40° 动态运动过程中的振动工况。

基于空间驱动部件动态运动仿真方法获取不同时刻太阳轮转角 θ_s^p ，柔轮转角 θ_f^h ，空间驱动部件的传动误差被定义为不同时刻柔轮实际转角和理论转角之间的差值，可以采用如下公式计算：

$$TE = \theta_f^h - \frac{z_s^p(z_r^h - z_f^h)}{z_f^h(z_s^p + z_r^p)} \theta_s^p \quad (2)$$

2 考虑装配误差的传动误差不确定性分析

空间驱动部件在装配过程中存在多源不确定性，各种装配误差之间相互影响，最终导致装配性能(传动误差)的不确定性。笔者将对不同装配误差之间的相关性进行准确表征，探究其不确定性传递规律。

2.1 区间变量与椭球模型

区间变量是一个变量的连续集合，装配过程中存在的多种不确定性变量可以量化为区间变量，其不确定性可以表示为：

$$X \in X^I = [X^L, X^U] \quad (3)$$

式中： I 为区间； L 和 U 分别为区间的上界和下界，区间变量 X^I 中的所有样本均处于上界 X^U 和下界 X^L 之间，区间变量如图 3 所示。

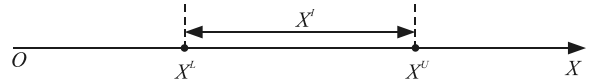


图 3 区间变量

区间中值 X^m 及区间半径 X^r 可以表示为：

$$X^m = (X^U + X^L)/2; \quad (4)$$

$$X^r = (X^U - X^L)/2. \quad (5)$$

将区间变量转化为标准区间变量 U ：

$$U = (X - X^m)/X^r. \quad (6)$$

标准区间变量的区间中值 $U^m=0$ ，区间半径 $U^r=1$ ，记为 $U \in U^I = [-1, 1]$ 。

对于具有相关性的参量不确定性，可以用多维椭球模型进行表征^[22]，通过椭球的几何性质反映参数的不确定性大小与相关程度。以 2 维椭球模型为例，其联合不确定性域如图 4 所示。

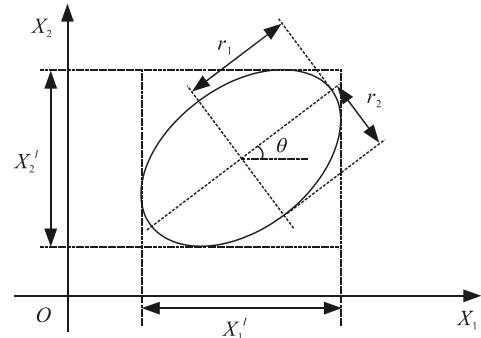


图 4 2 维椭球不确定性域

图 4 中的椭圆区域记为 $\Omega^{E,2}$ ， E 表示椭球模型，数字 2 表示维度。 $\Omega^{E,2}$ 在横坐标和纵坐标上的投影长度分别代表了区间变量 X_1 和 X_2 的上下界，称为椭球模型的边缘区间，其半轴长与倾斜角度则代表了区间变量 X_1 和 X_2 的相关性，可以定义区间变量 X_1 和 X_2 的协方差为^[23]：

$$\text{Cov}_{X_1 X_2} = \text{Cov}(X_1, X_2) = \sin \theta \cos \theta (r_1^2 - r_2^2). \quad (7)$$

式中： θ 为椭圆长轴与坐标轴之间最小的夹角； r_1 和 r_2 分别为图 4 中椭圆的半轴长，根据区间变量协方差可以推导区间变量 X_1 和 X_2 的相关系数为：

$$\rho_{x'_1 x'_2} = \frac{\text{Cov}_{x'_1 x'_2}}{X'_1 X'_2} = \frac{1}{X'_1 X'_2} \sin \theta \cos \theta (r_1^2 - r_2^2)。 \quad (8)$$

对于标准区间变量，通过其定义可以得到 $\theta = \pi/4$ ，标准区间变量相关系数与协方差为：

$$\rho_{u'_1 u'_2} = \text{Cov}_{u'_1 u'_2} = \frac{1}{2} (\bar{r}_1^2 - \bar{r}_2^2)。 \quad (9)$$

且有 $\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2 = 2$ 。原区间变量与标准区间变量相关系数关系为：

$$\rho_{x'_1 x'_2} = \rho_{u'_1 u'_2} = \frac{1}{2} (\bar{r}_1^2 - \bar{r}_2^2)。 \quad (10)$$

对于一般区间变量有：

$$\text{Cov}_{x'_1 x'_2} = X'_1 X'_2 \rho_{u'_1 u'_2} = \frac{1}{2} X'_1 X'_2 (\bar{r}_1^2 - \bar{r}_2^2)。 \quad (11)$$

2.2 装配误差相关性表征及不确定性域构建

空间驱动部件在装配时存在很多不确定性装配误差，通过敏感性分析方法确定了对系统影响较大的装配误差，即太阳轮 x 轴偏心、凸轮 x 轴偏心、凸轮 y 轴偏心以及凸轮 y 轴倾斜 4 个装配误差，将上述 4 个不确定性装配误差量化为区间变量 $X_1 \sim X_4$ ，得到 4 个变量的不确定性区间、区间中值及区间半径，如表 2 所示。

表 2 空间驱动部件不确定性装配误差参数

不确定性参数	X_1/mm	X_2/mm	X_3/mm	$X_4/(\circ)$
不确定性区间	[0, 0.04]	[0, 0.04]	[0, 0.04]	[0, 0.06]
区间中值 X_i^m	0.02	0.02	0.02	0.03
区间半径 X_i^r	0.02	0.02	0.02	0.03

分别在 4 个区间变量边缘区间内抽取 60 组样本，构成平面样本点集，记为 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, x_4^{(n)})$ ， $n=1, 2, \dots, 60$ ，标准区间变量的不确定性椭圆具有简洁的几何特性，将区间变量样本标准化，利用非线性优化算法构建如图 4 所示的最小包络面积椭圆域，确定该椭圆的几何参数，计算区间变量的协方差与相关系数，最终得到 4 个不确定性装配误差之间的相关性系数 $\rho_{x'_i x'_j}$ ，如表 3 所示。

表 3 不确定性装配误差相关性系数

$\rho_{x'_1 x'_1}$	$\rho_{x'_1 x'_2}$	$\rho_{x'_1 x'_3}$	$\rho_{x'_1 x'_4}$	$\rho_{x'_2 x'_2}$	$\rho_{x'_2 x'_3}$	$\rho_{x'_2 x'_4}$
-0.039 8	-0.061 9	0.015 0	-0.053 4	-0.175 8	0.221 9	

相关系数 $\rho_{x'_i x'_j}$ 反映了区间变量 $X_1 \sim X_4$ 的相关性程度，对于任意区间变量 X_i 和 X_j ，有 $-1 \leq \rho_{x'_i x'_j} \leq 1$ 。当 $0 < \rho_{x'_i x'_j} \leq 1$ 表明区间变量 X_i 和 X_j 是正相关关系；若 $-1 \leq \rho_{x'_i x'_j} < 0$ 时，表明区间变

量 X_i 和 X_j 是负相关关系；若 $\rho_{x'_i x'_j} = 0$ 时，表明区间变量 X_i 和 X_j 完全不相关。由表 3 可知： X_2 (凸轮 x 轴偏心误差) 与 X_3 (凸轮 y 轴偏心误差) 之间的相关性程度，以及 X_3 (凸轮 y 轴偏心误差) 与 X_4 (凸轮 y 轴倾斜误差) 之间的相关性程度较高，其余不确定性装配误差之间的相关性较小。

对于上述 4 个不确定性装配误差，其联合不确定性域为一个 4 维椭球 $\Omega^{E,4}$ ，可以表示为：

$$\Omega_x^{E,4} = \{X | (X - X^m)^T G_E (X - X^m) \leq 1\}。 \quad (12)$$

式中： $X = [X_1, X_2, X_3, X_4]^T$ 为 4 个区间变量构成的集合； $X^m = [X_1^m, X_2^m, X_3^m, X_4^m]^T$ 为区间中值所构成的集合，也代表了椭球域 $\Omega^{E,4}$ 的中心； G_E 为 $\Omega^{E,4}$ 的特征矩阵，决定了该椭球域的大小、形状及倾角等全部几何特征。

通过任意 2 个区间变量 X_i 和 X_j 之间的相关性系数，计算出这 2 个区间变量之间的协方差，从而得到 4 个装配误差区间变量的协方差矩阵：

$$C = \begin{bmatrix} \text{Cov}_{x'_1 x'_1} & \text{Cov}_{x'_2 x'_1} & \text{Cov}_{x'_3 x'_1} & \text{Cov}_{x'_4 x'_1} \\ \text{Cov}_{x'_1 x'_2} & \text{Cov}_{x'_2 x'_2} & \text{Cov}_{x'_3 x'_2} & \text{Cov}_{x'_4 x'_2} \\ \text{Cov}_{x'_1 x'_3} & \text{Cov}_{x'_2 x'_3} & \text{Cov}_{x'_3 x'_3} & \text{Cov}_{x'_4 x'_3} \\ \text{Cov}_{x'_1 x'_4} & \text{Cov}_{x'_2 x'_4} & \text{Cov}_{x'_3 x'_4} & \text{Cov}_{x'_4 x'_4} \end{bmatrix} \times 10^{-6} = \begin{bmatrix} 400 & -16.03 & -16.23 & -1.267 \\ -16.03 & 400 & -21.69 & -104.77 \\ -16.24 & -21.69 & 400 & 132.52 \\ -1.267 & -104.77 & 132.52 & 900 \end{bmatrix} \times 10^{-6}。 \quad (13)$$

特征矩阵 G_E 与协方差矩阵存在以下关系：

$$G_E = C^{-1}。 \quad (14)$$

可以得到空间驱动部件中 4 个不确定性装配误差的联合不确定性域为：

$$\Omega_x^{E,4} = \{X | (X - X^m)^T C^{-1} (X - X^m) \leq 1\}。 \quad (15)$$

2.3 空间驱动部件装配不确定性传递规律分析

由于不确定性装配误差的存在，导致整个系统的装配性能也具有一定的不确定性，利用 2.2 节中随机得到的 60 组装配误差样本，通过有限元建模仿真，可以获得在相应装配误差下空间驱动部件的不确定性响应。建立多项式回归模型描述空间驱动部件装配误差与传动误差之间的映射关系，模型的训练集与测试集按照 4:1 的比例进行划分。

多项式回归模型是线性回归的一种扩展，其核心思想是利用多项式方程建立空间驱动部件装配误

差与传动误差之间的映射关系，其中一次多项式回归模型所得到映射关系为：

$$y = 426.7X_1 - 3921.6X_2 + 2295.7X_3 - 511.1X_4 + 311.3. \quad (16)$$

通过平均绝对误差 (MAE) 来衡量模型的准确性，其定义为：

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \times 100\%. \quad (17)$$

式中： n 为样本个数； y_i 为真实值； \hat{y}_i 为预测值。通过计算可以得到平均绝对误差 MAE 为 8.13%，拟合精度较好。

在太阳轮转动角度 180° 时，所允许的最大传动误差为 0.1° ，即 $360''$ ，可以得到空间驱动部件传动误差的极限状态函数：

$$g(X) = 48.7 - 426.7X_1 + 3921.6X_2 - 2295.7X_3 + 511.1X_4. \quad (18)$$

2.4 不确定性装配误差可靠性及敏感性分析

在进行非概率可靠性分析时，需要将不同单位和尺度的不确定性因素统一到标准空间，根据 4 维不确定性装配误差的联合不确定性域 $\Omega_X^{E,4}$ ，标准化过程是将 X 空间的不确定域与极限状态函数映射到标准空间 δ ，映射变换为：

$$X = \mathbf{Q}_c^T \boldsymbol{\lambda}_c \delta + X^m; \quad (19)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}_c \boldsymbol{\lambda}_c \mathbf{Q}_c. \quad (20)$$

式中： \mathbf{C} 为协方差矩阵； \mathbf{Q}_c 为协方差矩阵特征分解得到的特征矩阵； $\boldsymbol{\lambda}_c$ 为由特征值所构成的对角矩阵。通过映射变换，原椭球域此时变换为 δ 空间中半径为 1，中心点在原点的 4 维球体，记为：

$$\Omega_\delta^{E,4} = \{\delta \mid \delta^T \delta \leq 1\}. \quad (21)$$

将原 X 空间中的极限状态方程 $g(X)$ 转变为 δ 空间中的极限状态方程 $G(\delta)$ ，如图 5 所示，若满足 $g(X) \geq 0$ ，则符合可靠性要求；若 $g(X) < 0$ ，则存在失效风险。

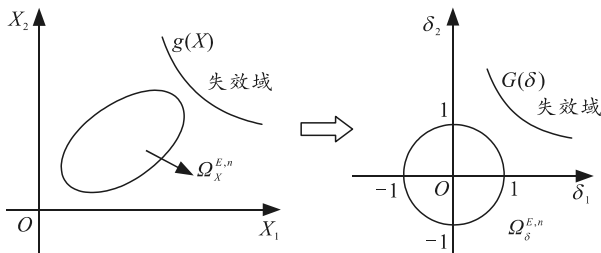


图 5 多维椭球模型的标准空间变换

非概率可靠性指标定义为标准区间原点到极限

状态面的最短距离，上述 4 维不确定性装配误差的联合不确定性域在采用椭球 $\Omega_X^{E,4}$ 进行表征时，最短距离即为最小二范数距离 $|\eta_E|$ ，可以通过以下优化模型求解：

$$\left. \begin{aligned} \eta_E &= \text{sign}(g(X^m)) \min \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2} \\ G(\delta) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

当 $\eta_E > 1$ 时，不确定性域与极限状态面相离，此时系统处于完全可靠状态；当 $\eta_E = 1$ 时，不确定性域与极限状态面仅有一个交点，表明系统的可靠性处于边界状态；当 $\eta_E < 1$ 时，不确定性域与极限状态面相交且交点不唯一，表明系统可能会发生失效，需要对系统参数进行调整。

按照上述方法，计算得到空间驱动部件装配误差不确定性非概率可靠性指标 $\eta_E = 0.97$ ，表明在现有不确定性装配误差下，空间驱动部件传动误差存在超过所允许最大限值的可能。除了不确定性域与极限状态面几何关系的方式外，可靠性指标还有以下定义：

$$\eta_E = \frac{g^U(X) + g^L(X)}{g^U(X) - g^L(X)}. \quad (23)$$

式中 $g^U(X)$ 和 $g^L(X)$ 分别为极限状态函数的上界和下界，可以证明，这 2 种定义是等价的^[24]。为了便于对空间驱动部件传动误差进行敏感性分析，后续将采用式(23)所示的定义进行计算。根据极值理论^[25]， $g^U(X)$ 和 $g^L(X)$ 可以通过求解拉格朗日函数得到：

$$L(x, \lambda) = a_0 + a^T X - \lambda((X - X^m)^T \mathbf{G}_E (X - X^m) - 1). \quad (24)$$

式中：

$$a_0 + a^T X = 48.7 - 426.7X_1 - 3921.6X_2 + 2295.7X_3 - 511.1X_4. \quad (25)$$

对 X 求偏导并令偏导数为 0，有：

$$\partial L / \partial X = a - 2\lambda \mathbf{G}_E (X - X^m) = 0; \quad (26)$$

$$X = X^m + \frac{1}{2\lambda} \mathbf{G}_E^{-1} a. \quad (27)$$

将式(27)带入到式(15)中并取等号可得：

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^T \mathbf{G}_E^{-1} a}. \quad (28)$$

联立式(11)、(25)、(27)和(28)可得：

$$g^U(X) = a_0 + a^T X^m + \sqrt{a^T \mathbf{G}_E^{-1} a} = a_0 + a_i X_i^m + \sqrt{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_i a_j \rho_{ij} X_i^r X_j^r}; \quad (29)$$

$$g^L(X) = a_0 + a^T X^m - \sqrt{a^T G_E^{-1} a} = a_0 + a_i X_i^m - \sqrt{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_i a_j \rho_{ij} X_i^r X_j^r} \quad (30)$$

再将式(29)和(30)代入到式(23)中可得:

$$\eta_E = \frac{a_0 + a_i X_i^m}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_i a_j \rho_{ij} X_i^r X_j^r}} \quad (31)$$

敏感性分析的计算方法定义为式(31)中的非概率可靠性指标对装配误差的区间中值、区间半径以及相关系数的偏导数:

$$\frac{\partial \eta_E}{\partial X_i^m} = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_i a_j \rho_{ij} X_i^r X_j^r}}; \quad (32)$$

$$\frac{\partial \eta_E}{\partial X_i^r} = \frac{-g(X^m) \cdot \sum_{j=1}^4 a_i a_j \rho_{ij} X_j^r}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_i a_j \rho_{ij} X_i^r X_j^r} \right)^{\frac{3}{2}}}; \quad (33)$$

$$\frac{\partial \eta_E}{\partial \rho_{jk}} = -\frac{g(X^m) \cdot a_i a_j X_i^r X_j^r}{2 \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_i a_j \rho_{ij} X_i^r X_j^r \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (34)$$

可靠性指标及装配误差敏感性分析结果如表 4 所示。

表 4 空间部件装配误差敏感性分析结果

敏感性分析	计算公式	数值($\times 10^{-3}$)
太阳轮 x 轴偏心中值敏感性/mm	$\partial \eta_E / \partial X_1^m$	-4.7
太阳轮 x 轴偏心半径敏感性/mm	$\partial \eta_E / \partial X_1^r$	-0.4
凸轮 x 轴偏心中值敏感性/mm	$\partial \eta_E / \partial X_2^m$	43.3
凸轮 x 轴偏心半径敏感性/mm	$\partial \eta_E / \partial X_2^r$	-36.3
凸轮 y 轴偏心中值敏感性/mm	$\partial \eta_E / \partial X_3^m$	25.3
凸轮 y 轴偏心半径敏感性/mm	$\partial \eta_E / \partial X_3^r$	-12.5
凸轮 y 轴倾斜中值敏感性/(°)	$\partial \eta_E / \partial X_4^m$	5.6
凸轮 y 轴倾斜半径敏感性/(°)	$\partial \eta_E / \partial X_4^r$	0.5

其中数值的绝对值大小代表灵敏度的强弱, 正负则表示正反比。从表 4 中可知: 空间驱动部件传动误差对凸轮 x 轴偏心误差的区间中值最为敏感, 可以通过减小凸轮 x 轴偏心的方式, 提高空间装配部件系统的可靠性。

3 随机振动下传动误差不确定性分析

空间驱动部件在服役过程中, 存在温度、振动等时变不确定性因素, 导致系统的传动误差也具有一定的不确定性, 传统的概率方法需要大量的样本

数据建立概率分布函数, 考虑到空间驱动部件在服役过程中难以获得大量数据, 基于区间过程模型, 对空间驱动部件服役过程中的振动不确定性进行抽样, 建立代理模型得到传动误差不确定性响应样本, 构建传动误差响应椭球模型, 基于此对空间驱动部件进行可靠性及灵敏度分析。

3.1 区间过程描述

区间过程任意时刻的不确定性参数都是一个变量的连续集合, 其不确定性为:

$$X^I(t) = [X^L(t), X^U(t)] \quad (35)$$

式中 $X(t)$ 为随时间变化的函数, 上标 I 、 L 、 U 的含义与区间变量中的含义相同。根据区间过程的定义, 所有样本函数均包含于边界函数内, 如图 6 所示。

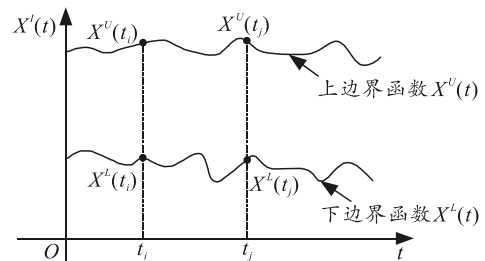


图 6 区间过程

区间过程的中值函数与半径函数分别为:

$$X^m(t) = (X^U(t) + X^L(t)) / 2; \quad (36)$$

$$X^r(t) = (X^U(t) - X^L(t)) / 2. \quad (37)$$

中值函数反映了随时间变化的趋势, 半径函数则表示区间过程不确定性大小。对于一个区间过程中任意 2 个时刻 t_i 和 t_j , 自协方差函数和自相关函数为:

$$\text{Cov}_{X^I, X^I}(t_i, t_j) = \text{Cov}(X(t_i), X(t_j)); \quad (38)$$

$$\rho_{X^I, X^I}(t_i, t_j) = (\text{Cov}_{X^I, X^I}(t_i, t_j)) / (X^r(t_i) X^r(t_j)). \quad (39)$$

对区间过程的样本函数取其在 2 个时刻 t_i 和 t_j 构成的点集, 同样可以构建椭球模型, 并确定任意两时刻之间的协方差及相关性系数。平稳区间过程是区间中值和区间半径均为常数的过程, 且协方差函数仅为时间间隔的函数, 自相关函数也仅为时间间隔的函数。不同的相关性函数影响平稳区间过程的时间相关性, 在对其抽样时, 不同的自相关函数波动程度不同。

3.2 服役过程振动不确定性抽样及误差反求

3.2.1 区间 K-L 展开及截断

区间 K-L 展开方法即将区间过程用标准区间变

量和时变函数的线性组合表征，并进行截断，可以表示为：

$$X(t) = X^m(t) + \sum_{j=1}^{\infty} X^r(t) \sqrt{\lambda_j^X} \varphi_j^X(t) \zeta_j. \quad (40)$$

式中： ζ_j 为标准区间变量； λ_j 和 $\varphi_j(t)$ 为自相关函数的特征值和特征函数，根据 Mercer 定理，有：

$$\rho_{X_1}(t, t') = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(t) \varphi_j(t'). \quad (41)$$

λ_j 和 $\varphi_j(t)$ 求解：

$$\int_T \rho_{X_1, X_1}(t, t') \varphi_j(t) dt = \lambda_j \varphi_j(t) \varphi_j(t'). \quad (42)$$

将区间过程表示为上述形式后，仍有无穷多区间变量，对 $K-L$ 展开式进行截断，对自相关函数的特征值进行排序，保留 M 项最大的特征值及对应级数，可以将区间过程近似截断：

$$\tilde{X}(t) = X^m(t) + \sum_{j=1}^M X^r(t) \sqrt{\lambda_j^X} \varphi_j^X(t) \zeta_j. \quad (43)$$

3.2.2 空间驱动部件服役过程振动不确定性抽样

将空间驱动部件服役过程的振动不确定性考虑为平稳区间过程 $X(t)$ ，中值函数 $X^m(t)=0 \mu\text{m}$ ，半径函数 $X^r(t)=10 \mu\text{m}$ ，自相关函数为：

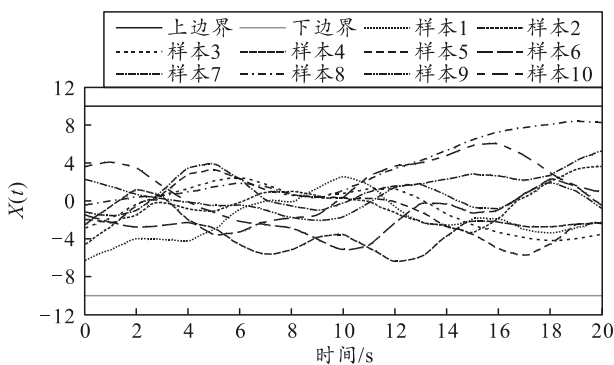
$$\rho_{X_1, X_1}(t, t') = e^{-|\tau|/l_t}. \quad (44)$$

式中： l_t 为时间相关长度； τ 为任意两时刻 t_i 和 t_j 的差值，即 $\tau=t_i-t_j$ 。

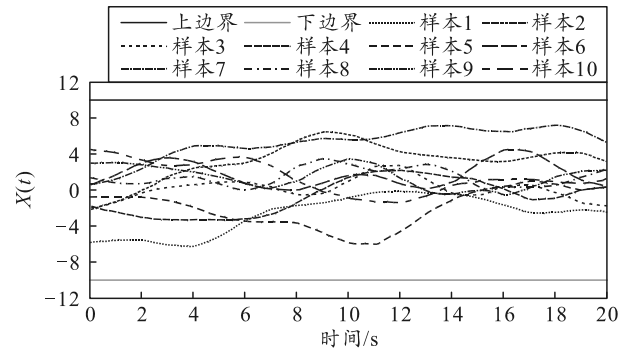
样本函数是时间相关性的最直观体现，通过 $K-L$ 展开，可以对振动不确定性进行区间抽样，本质是对有限个标准区间变量进行抽样，将一组标准区间变量代入式(43)中，可得到样本函数的表达式：

$$x^{(i)}(t) = X^m(t) + \sum_{j=1}^M X^r(t) \sqrt{\lambda_j^X} \varphi_j^X(t) \zeta_j^{(i)}. \quad (45)$$

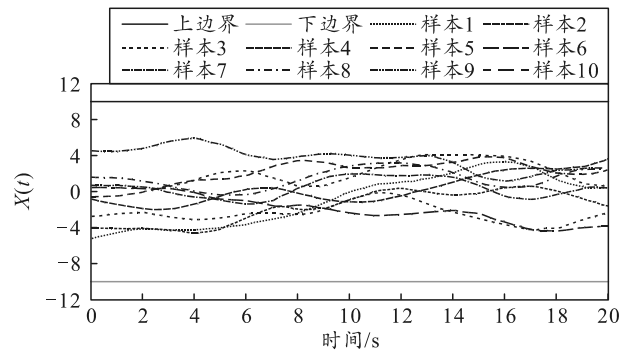
不同时间相关长度下的振动不确定性抽样函数如图 7 所示。



(a) 时间相关长度为 5 s



(b) 时间相关长度为 10 s



(c) 时间相关长度为 20 s

图 7 不同时间相关长度下的振动不确定性抽样函数

由图 7 可以发现：随着时间相关长度增加，抽样样本变得更加平滑，即振动不确定性区间过程具备更强的时间相关性，随时间变化的波动更小。图中的 3 个抽样结果符合实际情况，不仅说明了区间过程样本函数反映了时间相关特性，而且直接显示出区间 $K-L$ 展开对于区间过程抽样的有效性。同样在保证时间相关长度不变的情况下，可以获得不同时间间隔下的自相关系数，时间相关长度为 20 s 的自相关系数如表 5 所示。

表 5 时间相关长度为 20 s 下的不同时间间隔自相关系数

$\tau= t_i-t_j $	$\rho_{X^i, X^i}(\tau)$	$\tau= t_i-t_j $	$\rho_{X^i, X^i}(\tau)$
0	1	12	0.549
4	0.819	14	0.497
6	0.741	16	0.449
8	0.671	18	0.407
10	0.607		

由表 5 可以发现：随着时间间隔长度增加，振动不确定性之间的相关性减弱，同样证明了区间抽样的有效性。

3.2.3 空间驱动部件传动误差反求

通过上述方法获得了时间相关程度为 20 s 的 40 条振动不确定性样本函数，采用有限元仿真方法获得对应传动误差输出样本，并建立多项式回归代理模型得到振动与传动误差之间的关系：

$$y^{(n)}(t) = -0.7925 x^{(n)}(t)^2 - 3.9938 x^{(n)}(t) + 120.8. \quad (46)$$

式中： y 为传动误差； x 为振动值。构建传动误差样本的最小包络椭圆域，并对传动误差区间过程 $Y(t)$ 同样进行 $K-L$ 展开及截断：

$$Y^r(t) = \sqrt{\text{Cov}_{Y^r}(t_i, t_j)}; \quad (47)$$

$$Y^{(n)}(t) = Y^m(t) + \sum_{j=1}^M Y^r(t) \sqrt{\lambda_j^Y} \phi_j^Y(t) \zeta_j^{(n)}. \quad (48)$$

获得 $Y(t)$ 的 40 条样本函数，任意样本函数可以表示为：

$$y^{(i)}(t) = Y^m(t) + \sum_{j=1}^M Y^r(t) \sqrt{\lambda_j^Y} \phi_j^Y(t) \zeta_j^{(i)}. \quad (49)$$

对时间进行离散，即 $t=[t_1, t_2, \dots, t_s]$ ，构建 $40 \times s$ 组方程，其中未知数个数有 $40 \times (M+1)$ 项，只要保证 $s > M+1$ 即可求得。设定时间相关程度为 20 s，截断项数 $M=10$ ，离散时间项 $s=20$ ，获得传动误差的边界函数如图 8 所示。

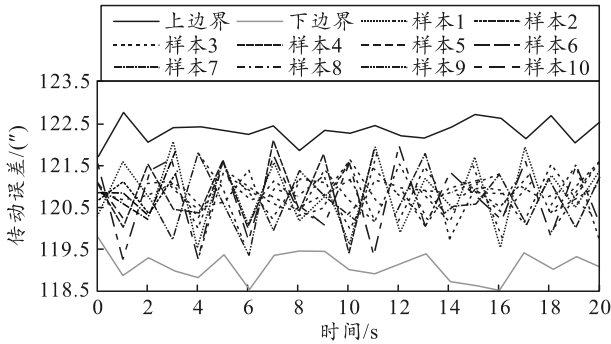


图 8 传动误差响应边界函数

可以发现：空间驱动部件传动误差在 $118'' \sim 123''$ 之间波动，样本函数均包含于上下边界函数内。传动误差中值函数如图 9 所示。

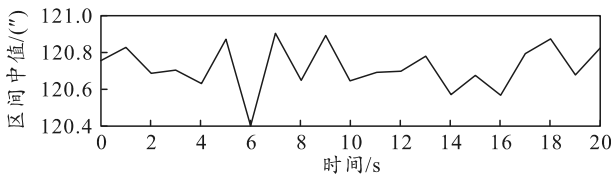


图 9 传动误差中值函数

传动误差中值函数反映了不确定性过程随时间的变化趋势，其最小值与最大值分别为 $120.4''$ 与 $120.9''$ 。传动误差半径函数如图 10 所示。

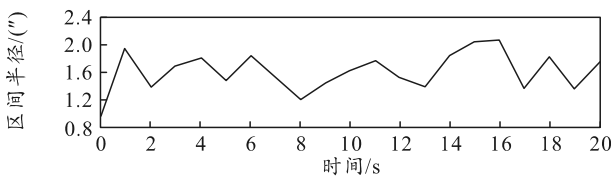


图 10 传动误差半径函数

传动误差半径函数反映了不确定性过程随时间变化的波动程度，即其不确定性，由图 10 中可看出：

传动误差的区间半径大部分都在 $2''$ 以下，说明其波动程度较小，只有在第 15 s 及第 16 s 处出现区间半径大于 $2''$ 的情况，其值分别为 $2.04''$ 与 $2.06''$ 。

3.3 振动不确定性下可靠性与灵敏度分析

在太阳轮转动 40° (时间是 20 s) 的过程中，设空间驱动部件所允许的最大传动误差为 $123''$ ，传动误差的极限状态函数为：

$$g(t) = 123 - Y^l(t). \quad (50)$$

式中 $Y^l(t)$ 为 3.2 节得到的传动误差区间过程。通过 $K-L$ 展开及截断，得到：

$$g(t) = 123 - Y^m(t) - \sum_{j=1}^M Y^r(t) \sqrt{\lambda_j} \phi_j(t) \zeta_j. \quad (51)$$

设：

$$A_0 = 123 - Y^m(t); \quad (52)$$

$$A_j = -Y^r(t) \sqrt{\lambda_j} \phi_j(t). \quad (53)$$

则式(51)可以写成：

$$g(t) = A_0 + \sum_{j=1}^{M_j} A_j \zeta_{ij}. \quad (54)$$

可以发现式(54)与式(18)形式相同，利用第 2.4 节的相同方法对空间驱动部件振动不确定性进行可靠性分析与敏感性分析。定义非概率可靠性指标为：

$$\beta(t) = (g^U(t) + g^L(t)) / (g^U(t) - g^L(t)). \quad (55)$$

通过建立拉格朗日函数求解 $g^U(t)$ 和 $g^L(t)$ ：

$$\text{La}(\zeta) = A_0 + A\zeta + \lambda(\zeta^T \zeta - 1). \quad (56)$$

解得：

$$g^U(t) = A_0 - A; \quad (57)$$

$$g^L(t) = A_0 + A; \quad (58)$$

$$\beta(t) = -\frac{A_0}{A} = \frac{123 - Y^m(t)}{Y^r(t) \sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j} \phi_j(t)}. \quad (59)$$

最终求得的非概率可靠性指标 $\beta(t)$ 是时间 t 的函数，利用非概率可靠性指标 $\beta(t)$ 对区间过程的中值函数和半径函数求偏导，得到的灵敏度分析结果仍为时间 t 的函数，具体表达如下：

$$\frac{\partial \beta}{\partial Y^m(t)} = \frac{1}{Y^r(t) \sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j} \phi_j(t)}; \quad (60)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial Y^r(t)} = \frac{123 - Y^m(t)}{(Y^r(t))^2 \sum_{j=1}^M \sqrt{\lambda_j} \phi_j(t)}. \quad (61)$$

如图 11 所示，计算并绘制传动误差的非概率可

可靠性指标。

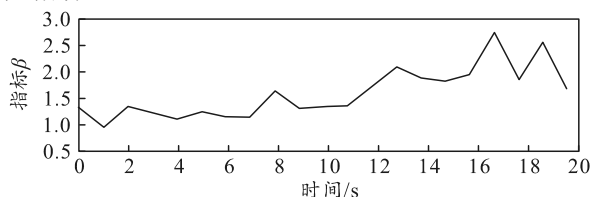


图 11 传动误差非概率可靠性指标

可以发现：在现有振动工况下，非概率可靠性指标在第 1 s 处出现小于 1 的情况，说明在此处空间驱动部件的传动误差有可能出现超过限定值的情况；其余时刻的非概率可靠性指标均大于 1，说明传动误差较小，不会超过限定值。

对区间中值函数和区间半径函数进行灵敏度分析，结果如图 12 和 13 所示。

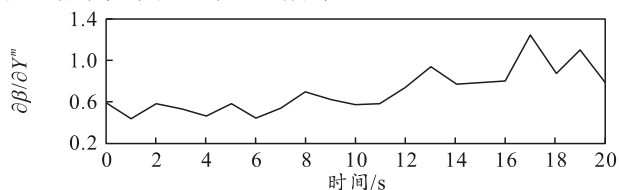


图 12 区间中值灵敏度分析

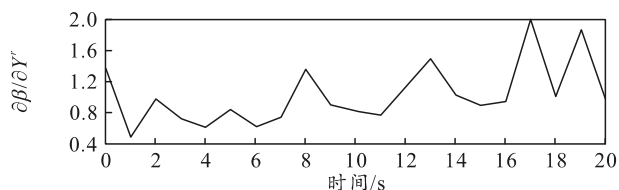


图 13 区间半径灵敏度分析

从图 12—13 中可以看出：传动误差非概率可靠性指标对其区间中值的灵敏度较小，整体灵敏度数值处于 0.4~1.4 之间，对其区间半径的整体灵敏度数值处于 0.4~2.4 之间。

4 结论

笔者引入基于区间理论的非概率分析方法，定量描述多源装配误差与服役振动不确定性下的系统可靠性及传动误差敏感性，得到了如下结论：

1) 通过空间驱动部件有限元建模及装配/服役过程仿真，对其传动误差进行了精准预测，实现了对空间驱动部件性能的定量评估。

2) 构建了装配误差椭球不确定性域和传动误差极限状态函数，求解的空间驱动部件装配过程非概率可靠性指标 $\eta=0.97$ ，表明在当前不确定性装配误差下，系统存在失效的概率，敏感性分析显示，凸轮 x 轴偏心误差的区间中值对可靠性影响最为显著，为空间驱动部件装配误差优化提供了直接指导。

3) 应用区间过程模型分析了空间驱动部件服

役过程中的振动不确定性，结果显示不同时间相关长度对振动波动性的影响显著，利用椭球模型反求得到的传动误差边界为 $118''\sim 123''$ ，可靠性分析表明传动误差在第 1 s 时可能会出现超过限定值的情况，传动误差非概率可靠性指标对其区间中值及区间半径的敏感性分别为 0.4~1.4 与 0.4~2.4。

参考文献：

- [1] 曹鹏, 刘志全. 空间对接组件中的结构锁及其传动系统[J]. 航天器工程, 2003, 12(1): 41-46.
- [2] 田静. 基于动态故障树的卫星姿态控制系统寿命预测方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2016.
- [3] 任华兴, 赵本华, 王燕, 等. 基于装配误差分析的空间高精度驱动机构装配技术研究[J]. 载人航天, 2022, 28(6): 823-832.
- [4] 董航佳. 空间模块化天线在轨装配误差分析及性能调控研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2023.
- [5] 贾东永, 韩彬, 周奉香, 等. 货运飞船敏感器设备安装精度保证设计[J]. 航天器环境工程, 2022, 39(3): 262-267.
- [6] 刘检华, 夏焕雄, 巩浩, 等. 精密装配的内涵、技术体系和发展趋势[J]. 机械工程学报, 2023, 59(20): 436-450.
- [7] 钱场明. 考虑多源不确定性的复杂机械结构动态特性稳健均衡优化设计[D]. 杭州: 浙江大学, 2020.
- [8] VELEX P, MAATAR M. A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour[J]. Sound and Vibration, 1996, 191(5): 629-660.
- [9] JIA H, LI J, XIANG G, et al. Modeling and analysis of pure kinematic error in harmonic drive[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 155: 104122.
- [10] LI W, HAO L J. Study on the degradation law of harmonic gear drive backlash with wear and assembly errors[J]. Engineering Failure Analysis, 2022, 140: 106614.
- [11] YANG Y, ZHOU G, CHANG L, et al. A modelling approach for kinematic equivalent mechanism and rotational transmission error of RV reducer[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 163: 104384.
- [12] LI Y, ZHANG J B, ZENG T, et al. Study on action mechanism of reliability influencing factors for space drive mechanism[J]. Physics: Conference Series, 2020, 1676(1): 012158.
- [13] 李振, 石佳东, 马国政, 等. 自润滑基础运动部件模拟空间环境试验装置研究进展[J]. 航天器环境工程, 2023, 40(4): 423-429.
- [14] LI C, LIU H. Time-varying Response Analysis of Spur Gear System[J]. E3S Web of Conferences, 2021, 276: 01007.