

doi: 10.7690/bgzd.2023.04.012

基于构建虚拟多通道的欠定盲源分离方法研究

王川川, 汪亚, 朱宁, 王华兵

(电子信息系统复杂电磁环境效应国家重点实验室, 河南 洛阳 471003)

摘要: 针对欠定盲源分离 (underdetermined blind source separation, UBSS) 的信源数估计和信号分离问题, 探索基于小波分解的虚拟多通道构建及其在欠定盲源分离中的应用。通过小波分解构造虚拟观测信号, 在欠定盲源分离模型的信源数估计和信号分离方面, 结果较不理想, 分析发现是由于采用小波变换构建虚拟的观测信号, 只用到原观测信号的部分信息产生虚拟的观测信号, 并没有增加接收信号中蕴含的信息, 即并非像真实的天线阵列一样, 针对信号的到达角, 产生对应的阵列流型。结果表明: 解决欠定盲源分离问题, 必须依靠非负矩阵分解、张量分解或稀疏分量分析等思路。

关键词: 欠定盲源分离; 离散小波变换; 虚拟多通道; 信源数估计; 独立分量分析

中图分类号: TP301.6 **文献标志码:** A

Research on Underdetermined Blind Source Separation Based on Constructing Virtual Multi-channel

Wang Chuanchuan, Wang Ya, Zhu Ning, Wang Huabing

*(State Key Laboratory of Complex Electromagnetic Environment Effects on
Electronics and Information System, Luoyang 471003, China)*

Abstract: Aiming at the problems of source number estimation and signal separation in underdetermined blind source separation (UBSS), the construction of virtual multi-channel based on wavelet decomposition and its application in underdetermined blind source separation are explored. Constructing the virtual observation signal by wavelet decomposition is not ideal in the source number estimation and signal separation of the underdetermined blind source separation model, which is due to the fact that using wavelet transform to construct the virtual observation signal only uses part of the information of the original observation signal to generate a virtual observation signal, and does not increase the information contained in the received signal. That is to say, it is not like the real antenna array, which produces the corresponding array manifold according to the arrival angle of the signal. The results show that to solve the problem of underdetermined blind source separation, we must rely on non-negative matrix factorization, tensor decomposition or sparse component analysis.

Keywords: underdetermined blind source separation; discrete wavelet transform; virtual multi-channel; source number estimation; independent component analysis

0 引言

盲源分离 (blind source separation, BSS) 是一种在无源信号和混叠系数先验信息的情况下, 仅利用观测信号实现源信号恢复的技术。鉴于其独有的优势, 盲源分离技术引起了国内外信号处理界学者的广泛关注^[1-4]。当天线阵元数量少于辐射源信号数量时, BSS 问题称为欠定盲源分离 (UBSS), 由于其更广泛的适用场合, UBSS 已成为国际上信号处理领域的研究热点。

目前, 欠定盲源分离问题的解决通常通过“两步法”实现, 先进行混合矩阵估计, 然后在此基础上实现源信号的分离^[1]。现阶段, 解决欠定盲源分离

问题主要有 3 类思路: 1) 基于非负矩阵分解方法^[5-6], 这类方法不要求源信号的稀疏性, 但源有非负约束通常无法得到惟一解; 2) 通过张量分解实现混合矩阵估计^[7], 在源信号统计独立且非高斯分布情况下效果良好, 基本原理是寻求获取观测信号的二阶统计量、四阶累积量和六阶累积量等数学统计信息, 在此基础上实现混合矩阵估计, 计算复杂度很高; 3) 通过源信号的稀疏性进行混合矩阵估计和信号分离^[1-2, 8-9], 当源信号能达到算法要求的稀疏性条件时, 混合矩阵估计和源信号恢复效果比较理想, 方法难点在于提取属于单一辐射源的时频单源点集合。

观测通道扩展是解决欠定盲源分离问题的一种

收稿日期: 2022-12-12; 修回日期: 2023-01-28

基金项目: 国家自然科学基金(61801480)

作者简介: 王川川(1985—), 男, 河南人, 博士, 助理研究员, 从事盲信号处理和复杂电磁环境效应研究。E-mail: Wangchuan1083@126.com。

新技术思路，旨在通过对观测信号进行分解、延时等处理，构造虚拟的观测信号，扩充观测信号的维数，使得虚拟后观测信号的维数不小于辐射源信号的个数，进而将欠定盲源分离问题转换为非欠定盲源分离问题。虚拟多通道处理思路的关键是观测信号的预处理，即如何虚拟构建得到多路观测信号，可借助经典多通道盲分离算法达到源信号的恢复。笔者尝试基于小波变换构造虚拟多通道观测信号，以探索欠定盲源分离中信源数的估计以及信号分离的可行方法。

1 欠定盲源分离模型及虚拟多通道观测信号的构建方法

1.1 欠定盲源分离数学模型

笔者针对线性瞬时混叠盲源分离问题开展研究。设有 n 个辐射源信号，表示为 $s(t)=[s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)]^T$ ，上标 T 表示转置。信号采样点数为 $t=1, 2, \dots, T_0$ 。 n 个源信号在传播及被传感器接收过程中，由于环境的复杂性会产生信号混叠，由天线阵列接收的 m 个观测信号表示为 $x(t)=[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]^T$ 。任何一个观测信号 $x(t)$ 都是源信号 $s(t)$ 的混叠。线性瞬时混叠盲源分离问题的数学模型可表示为：

$$x(t)=As(t)+n(t)。 \quad (1)$$

式中：混合矩阵 A 和源信号 $s(t)$ 的先验信息都无法得到，只有观测信号 $x(t)$ 可通过测量得到； $n(t)$ 为信号接收中混叠的加性噪声。

当观测信号个数 m 小于源信号个数 n 时，盲源分离问题称为欠定盲源分离。解决欠定混合矩阵估计问题，首先需要根据观测信号 $x(t)$ 估计得到信源数 n ，然后估计得到混合矩阵 A ，最后实现源信号的恢复。

1.2 基于离散性小波变换^[10]的虚拟多通道构建

连续性小波变换 (continuous wavelet transform, CWT) 的基函数是具有紧支集的母函数 $X(t)$ ，通过对母函数 $X(t)$ 的伸缩和平移，就得到一个连续性小波序列：

$$\Psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a,b \in R; a \neq 0。 \quad (2)$$

式中： a 代表伸缩因子； b 代表平移因子；取连续的数值。

任意函数 $f(t) \in L^2(R)$ 的连续性小波变换表达式为：

$$W_f(a,b)=|a|^{-1/2} \int_R f(t)\Psi^*((t-b)/a)dt。 \quad (3)$$

重构公式为：

$$f(t)=\frac{1}{C\Psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} W_f(a,b)\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dadb。 \quad (4)$$

在时间和位移域内对尺度因子 a 和时移因子 b 进行离散取值，就是对尺度因子 a 和时移因子 b 的离散化处理。大多用的离散方法是将尺度因子按幂级数离散，选择 $a=a_0^j, j \in z$ ，其中 a_0 为大于 1 的固定伸缩步长。当 $j=0$ ，即 $a=a_0^0=1$ 时， $\Psi_{a,b}(t)=\Psi(t-b)$ ， b 可在某一基本间隔 $b_0(b_0>0)$ 进行均匀采样。必须选择合适的 b_0 ，使之满足采样定理要求，从而可以涵盖整个时间轴。

当尺度因子 $a \neq 1$ 即 $j \neq 0$ ， j 的取值每增加 1 个步长时， $\Psi(a^j t)$ 的宽度比 $\Psi(t)$ 就增加了 a_0^j 倍，对应它的频带就降低了 a_0^j 倍，使得其采样间隔可扩大 a_0^j 倍。也就是说，假如 $j=0$ ， b 的采样基本间隔是 b_0 ，则在某一不为零的 j 值下沿，以 $a_0^j b_0$ 的间隔对 b 轴均匀采样。按尺度因子 a 和时移因子 b 对连续性小波函数 $\Psi_{a,b}(t)$ 进行离散化表示，可获得离散小波函数 $\Psi_{j,k}(t)$ ，表示为：

$$\Psi_{j,k}(t)=\frac{1}{\sqrt{a_0^j}}\Psi\left(\frac{(t-ka_0^j b_0)}{a_0^j}\right)=a_0^{-j/2}\Psi[a_0^{-j}(t-ka_0^j b_0)]=a_0^{-j/2}\Psi[a_0^{-j}t-kb_0]。 \quad (5)$$

式中： a_0^{-j} 为放大倍数； b_0 为采样间隔或时间步长。

离散化的思想实现了小波变换作为“数学显微镜”的重要功能，设置合适的放大倍数 a_0^{-j} ，在某指定位置对某函数或信号实施采样，可以通过以特定步长平移到另一个位置来继续采集。如果放大倍数 a_0^{-j} 过大，即尺度因子太小，则表示观测尺度过小，对应的采样间隔依小步长移动一个距离；反之，假如 a_0^{-j} 取值过小，即尺度因子太大，则表示观测尺度过大，相应的采样间隔则将根据较大的步长移动一段距离。从式(5)可知：增大的步长 $a_0^j b_0$ 与放大倍数 a_0^{-j} 成反比，相应采样间隔的步长会随着放大倍数的改变而改变。

根据连续性小波变换的原理，可以推导出相应的离散性小波变换 (discrete wavelet transform, DWT)，其表达式为：

$$DWT_f(j, k) = \langle f(t), \Psi_{j, k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\Psi_{j, k}(t)} dt = a_0^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi[a_0^{-j}t - kb_0] dt \quad (6)$$

在尺度因子 a 和时移因子 b 离散化的过程中, 假如尺度因子 a 选择为 2 的整数次幂, 即选取 $a_0=2$; 位移因子 $b_0=1$, 即通过 b_0 对时间轴归一化, 得到二进离散小波为:

$$\Psi_{j, k}(t) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}t - k) \quad (7)$$

对应它的二进离散小波变换可表示为:

$$DWT_f(j, k) = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi(2^{-j}t - k) dt \quad (8)$$

基于 DWT 的虚拟多通道盲源分离方法的具体步骤如下:

1) 信号预处理。对混合信号进行小波分解, 得到一系列小波系数分量。

2) 构建虚拟观测信号矩阵。一般来说, 第 1 步预处理得到的小波系数分量不能直接作为独立分量分析的输入信号, 因为离散性小波变换分量需要进行单侧重构, 以获得与源信号具有同样时域长度的信号分量, 在此基础上选取部分分量构造观测信号矩阵。

3) 将第 2 步构造的虚拟观测信号矩阵作为输入, 估计信源数量。

4) 应用独立分量分析 (independent component analysis, ICA) 算法实施信号分离。第 2 步构造的虚拟观测信号矩阵和第 3 步估计的信源数作为 ICA 的输入要素, 运行算法获得分离信号。

5) 分析分离结果的处理效果, 通过计算分离信号与源信号的相关系数, 评估分离效果。

该算法的关键在于虚拟观测矩阵 X 的构建, 关于矩阵 X 的构建问题, 选择小波分解结果中哪些层, 是选择近似分量还是细节分量重构信号, 对分离效果的影响如何, 目前缺少有关选取标准的理论和详细分析, 下面通过选择不同的分量构建 X , 进行对比。

2 射源数目估计实验与分析

采用基于信息论准则的 9 种信源数估计方法, 分别为 AIC 方法^[11]、MDL 方法^[12]、基于对角加载的 AIC 方法^[11, 13]、基于对角加载的 MDL 方法^[12, 13]、RSVD 方法^[14]、KIC 方法^[15]、NUMDL 方法^[16]、GDEKIC 方法^[17]、GDEMDL 方法^[18], 观测信号叠加高斯白噪声。实验条件设置为:

1) s_1 为 BPSK 信号, 码元宽度为 $10/31 \mu\text{s}$, 载波频率为 10 MHz;

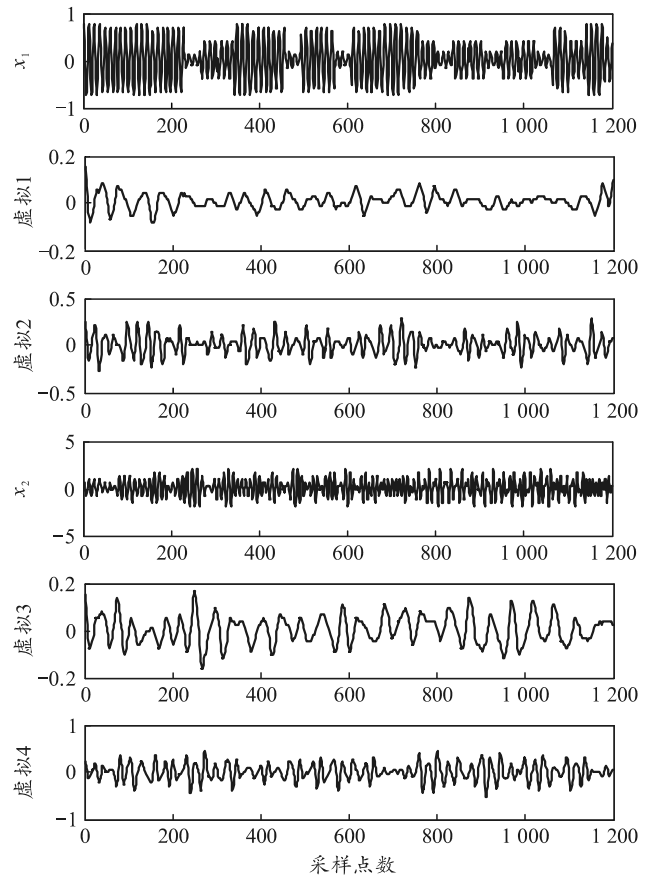
2) s_2 为 CW 信号, 子脉冲宽度为 $15 \mu\text{s}$, 载波频率为 10 MHz;

3) s_3 为 LFM 信号, 脉冲宽度为 $10+10\text{rand}(1) \mu\text{s}$, 起始频率为 10 MHz, 调频带宽为 $10/[1+\text{rand}(1)] \text{MHz}$;

4) s_4 为 MPSK 信号, 弗朗克编码方式, 码元宽度为 $0.4 \mu\text{s}$, 载波频率为 50 MHz。

阵列天线阵元数 $M=2$ 或 3, 信号个数 $K=3$ 时, 辐射源信号由 s_1 、 s_2 、 s_3 组成, 当 $K=4$ 时, 辐射源信号由 s_1 、 s_2 、 s_3 、 s_4 组成。混合矩阵 A 由随机函数 rand 产生, 采样频率为 120 MHz, 信号采样点数为 N , 混合信号叠加高斯白噪声, 信噪比变化范围为 $-20 \sim 20 \text{dB}$, 步长为 2 dB, 在每个信噪比上进行 200 次 Monte Carlo 仿真。

实验一: 设置小波基函数为 db4 函数, 小波分解层数为 4 层。选择每一路观测信号的各层近似分量分别重构信号, 与原观测信号组合成新的观测信号, 作为源数估计的输入数据。不同情况下, 信源数估计结果分别如图 1 和 2 所示。



(a) 虚拟观测信号时域波形

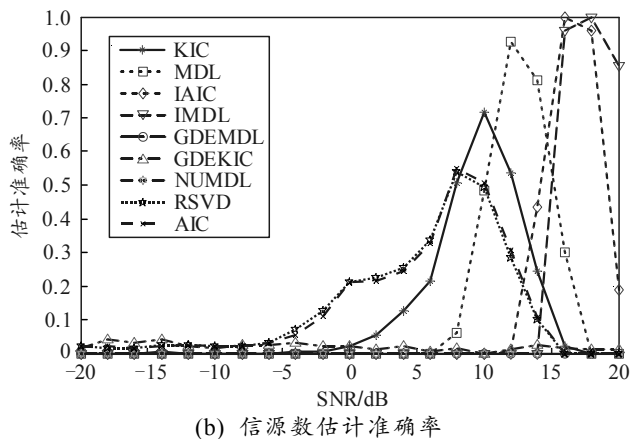
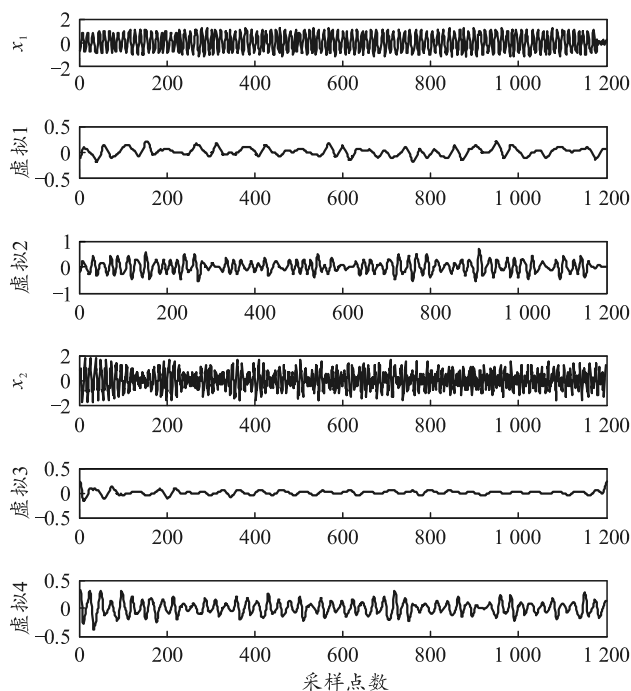
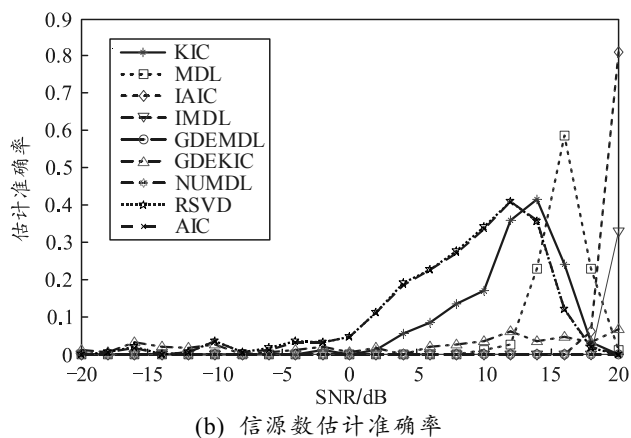


图 1 $M=2, K=3$ 时, 选择每一路观测信号的各层近似分量组成新的观测信号, 信源数估计实验结果



(a) 虚拟观测信号时域波形



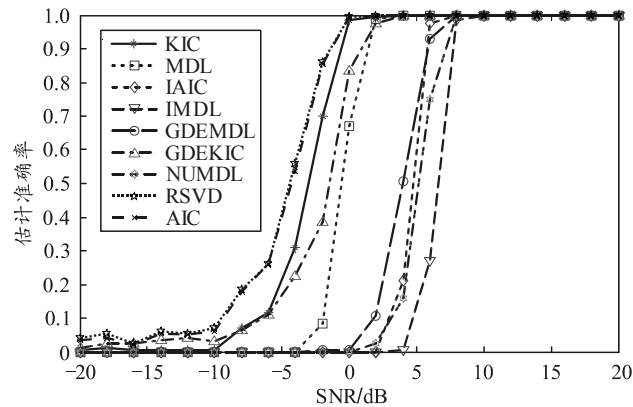
(b) 信源数估计准确率

图 2 $M=2, K=4$ 时, 选择每一路观测信号的各层近似分量组成新的观测信号, 信源数估计实验结果

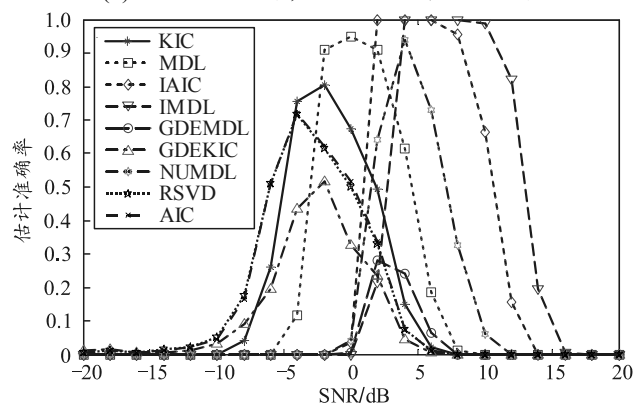
从图 1 和 2 可看出, 在信源数变化的情况下,

通过虚拟构造观测信号的方法进行信源数估计, 很难以概率 1 准确实现源数估计。

实验二: 设置小波基函数为 db4 函数, 小波分解层数为 4 层。选择每一路观测信号的各层细节分量与原观测信号组成新的观测信号, 作为源数估计的输入数据。信源数估计的准确率曲线如图 3 所示。



(a) $M=2, K=3$ 时, 信源数估计实验结果



(b) $M=3, K=4$ 时, 信源数估计实验结果

图 3 选择每一路观测信号的各层细节分量组成新的观测信号, 信源数估计实验结果

从上图可看出, 选择每一路观测信号的各层细节分量组成新的观测信号, 在天线阵元数和源信号数改变的情况下, 应用不同的信源数估计算法, 随着观测信号信噪比的增大, 有时能稳定的以概率 1 实现信源数的估计, 有时以概率 1 实现信源数估计后, 估计结果又随着信噪比的增大而变差, 不能稳定准确地实现信源数估计。

分析原因, 认为是通过观测信号的小波分解, 构造新的观测信号, 并非像增加阵列一样, 提供足够多的新维度的观测信号信息。

3 信号盲分离实验与分析

仿真实验条件与第 2 节相同, 盲源分离算法选用基于负熵的 FastICA 算法^[19]。假设信源数能够准确估计, 选取观测信号小波分解的第 1 层近似分量

构造的虚拟信号与原观测信号组成新的观测信号，不同信源数情况下的信号分离结果如表 1 和 2 所示。选取观测信号小波分解的第 1 层细节分量构造的虚拟信号与原观测信号组成新的观测信号，在不同信源数情况下的信号分离结果如表 3 和 4 所示。

表 1 选取第 1 层近似分量构造虚拟信号，3 个信源情况下的信号分离结果

K=3	相似系数矩阵
第 1 次实验	$\begin{bmatrix} 0.0195 & 0.1380 & -0.5976 \\ -0.1626 & -0.2078 & \mathbf{0.7122} \\ -\mathbf{0.7925} & 0.4843 & -0.0584 \\ -0.3441 & 0.0605 & -0.0162 \end{bmatrix}$
第 2 次实验	$\begin{bmatrix} -0.1986 & -\mathbf{0.9281} & 0.0591 \\ 0.2496 & 0.0703 & \mathbf{0.7447} \\ 0.0015 & -0.3153 & -0.1828 \\ -0.1645 & 0.0713 & -0.6103 \end{bmatrix}$
第 3 次实验	$\begin{bmatrix} -0.6111 & -0.1079 & -0.2255 \\ 0.2855 & -0.2063 & \mathbf{0.7177} \\ 0.6395 & 0.5006 & -0.1392 \\ -0.0360 & 0.2925 & -0.4409 \end{bmatrix}$
第 4 次实验	$\begin{bmatrix} 0.1795 & -0.1365 & 0.6227 \\ 0.3199 & -0.1932 & 0.6766 \\ -\mathbf{0.7450} & -0.6276 & 0.0236 \\ 0.1371 & 0.2241 & -0.0112 \end{bmatrix}$
第 5 次实验	$\begin{bmatrix} -\mathbf{0.9369} & -0.0517 & -0.0609 \\ 0.3377 & 0.1706 & 0.0428 \\ -0.0320 & 0.1499 & 0.4745 \\ -0.0141 & 0.6289 & 0.6435 \end{bmatrix}$

表 2 选取第 1 层近似分量构造虚拟信号，4 个信源情况下的信号分离结果

K=4	相似系数矩阵
第 1 次实验	$\begin{bmatrix} 0.1058 & 0.5138 & 0.0203 & 0.0028 \\ 0.2657 & -\mathbf{0.8115} & -0.0987 & -0.1603 \\ 0.4631 & 0.1666 & 0.2096 & 0.1013 \\ -0.6664 & -0.0009 & -0.3328 & -0.4889 \end{bmatrix}$
第 2 次实验	$\begin{bmatrix} 0.1254 & 0.5287 & -0.0683 & -0.0067 \\ -0.1805 & -0.0020 & -0.4390 & -0.0699 \\ -0.5177 & 0.0689 & -\mathbf{0.7585} & -0.0442 \\ 0.0394 & 0.6039 & 0.0301 & 0.6988 \end{bmatrix}$
第 3 次实验	$\begin{bmatrix} -0.1833 & -0.5377 & 0.0748 & -0.0212 \\ -0.0524 & 0.0835 & -0.2518 & 0.0634 \\ 0.5471 & -0.3473 & 0.6868 & -0.1721 \\ -0.4254 & -0.6409 & -0.3208 & -0.3596 \end{bmatrix}$
第 4 次实验	$\begin{bmatrix} 0.0813 & -0.1367 & -0.0719 & 0.0452 \\ -0.0895 & -0.4270 & -\mathbf{0.8400} & -0.3566 \\ -0.4049 & -0.2018 & 0.0254 & -0.0331 \\ 0.5752 & 0.4926 & -0.0290 & -0.5569 \end{bmatrix}$
第 5 次实验	$\begin{bmatrix} -0.1127 & -0.2277 & -0.1234 & 0.1017 \\ 0.4457 & -\mathbf{0.8217} & -0.2154 & -0.1361 \\ 0.1281 & -0.0126 & -0.1211 & -0.0001 \\ -0.4922 & 0.0004 & -0.6606 & -0.6107 \end{bmatrix}$

表 3 选取第 1 层细节分量构造虚拟信号，3 个信源情况下的信号分离结果

K=3	相似系数矩阵
第 1 次实验	$\begin{bmatrix} 0.0352 & -0.0288 & -0.0011 \\ 0.2100 & -0.0260 & \mathbf{0.9878} \\ 0.6619 & \mathbf{0.7213} & -0.0431 \\ 0.1894 & 0.1466 & 0.0648 \end{bmatrix}$
第 2 次实验	$\begin{bmatrix} -0.0374 & 0.0257 & 0.0340 \\ -0.2359 & -\mathbf{0.9509} & 0.1449 \\ -\mathbf{0.8011} & 0.0390 & -0.6636 \\ 0.0592 & 0.0474 & -0.1742 \end{bmatrix}$
第 3 次实验	$\begin{bmatrix} -0.0349 & 0.0200 & -0.0266 \\ 0.3699 & \mathbf{0.8782} & 0.3932 \\ 0.5007 & 0.0422 & -0.6967 \\ 0.4108 & 0.0038 & -0.1906 \end{bmatrix}$
第 4 次实验	$\begin{bmatrix} 0.0161 & -0.0093 & 0.0100 \\ \mathbf{0.9954} & 0.1027 & 0.0418 \\ -0.0420 & \mathbf{0.9115} & 0.4121 \\ 0.0013 & 0.0155 & 0.3091 \end{bmatrix}$
第 5 次实验	$\begin{bmatrix} 0.0674 & -0.0354 & -0.0480 \\ 0.1777 & \mathbf{0.9789} & -0.0704 \\ 0.6893 & -0.0104 & \mathbf{0.7853} \\ 0.0958 & 0.0323 & -0.0536 \end{bmatrix}$

表 4 选取第 1 层细节分量构造虚拟信号，4 个信源情况下的信号分离结果

K=4	相似系数矩阵
第 1 次实验	$\begin{bmatrix} 0.0200 & 0.0019 & -0.0158 & 0.0800 \\ 0.2215 & -0.1338 & -0.0873 & \mathbf{0.9549} \\ -0.0813 & -0.5150 & 0.6528 & 0.0088 \\ 0.1523 & 0.4578 & -0.2300 & -0.0171 \end{bmatrix}$
第 2 次实验	$\begin{bmatrix} -0.0176 & 0.2555 & 0.1147 & 0.0825 \\ -0.0412 & -\mathbf{0.9417} & 0.1054 & -0.1697 \\ -0.1307 & 0.0621 & \mathbf{0.8897} & 0.2485 \\ 0.1522 & -0.0047 & -0.2121 & -0.1388 \end{bmatrix}$
第 3 次实验	$\begin{bmatrix} 0.0191 & 0.0099 & -0.0593 & -0.0150 \\ -0.1193 & -0.0284 & -0.0156 & -0.0126 \\ -\mathbf{0.9650} & -0.0330 & -0.2660 & -0.1551 \\ 0.0155 & -\mathbf{0.8964} & -0.3586 & 0.2973 \end{bmatrix}$
第 4 次实验	$\begin{bmatrix} -0.0365 & -0.0068 & -0.0541 & -0.0138 \\ 0.0726 & 0.0021 & 0.0067 & -0.0141 \\ \mathbf{0.9583} & 0.0978 & -0.1188 & -0.1594 \\ -0.0145 & \mathbf{0.7585} & -0.2269 & 0.5968 \end{bmatrix}$
第 5 次实验	$\begin{bmatrix} -0.0411 & 0.0204 & -0.0385 & 0.0137 \\ -0.0177 & 0.0013 & 0.0170 & -0.0386 \\ 0.3144 & -0.2612 & -0.2137 & \mathbf{0.8769} \\ 0.6817 & \mathbf{0.7415} & -0.0134 & -0.0534 \end{bmatrix}$

表 1—4 中，相似系数矩阵的每个元素表示分离信号与源信号的相似系数，相似系数的行表示分离信号的序号，列表示源信号的序号。当相似系数矩阵元素值不小于 0.7 时，一般认为分离效果比较理想，从分离信号中能获得较多的源信号信息。在

假设信源数能够准确估计的情况下，当信源数 $K=3$ 时，通过多次分离实验发现，通常能有 1 或 2 个源信号能得到较理想的恢复。当信源数 $K=4$ 时，多次分离实验发现，通常也是只有 1 或 2 个源信号能得到较理想的恢复。采用观测信号小波分解后得到的近似分量或细节分量构造虚拟信号，从而组成新的观测信号，其分离效果无明显不同。综合本部分实验结果可知，通过虚拟阵列构造的观测信号，在欠定盲源分离模型的情况下，一般不能实现全部源信号的正确恢复。

综合第 2 和第 3 节实验结果可认为，通过小波分解构造虚拟信号，进而构造虚拟观测信号，在解决欠定盲源分离问题方面不能取得理想的结果。

4 结论

笔者针对基于观测通道扩展的欠定盲源分离方法进行了深入研究。研究结果表明，通过小波分解构造虚拟信号，进而构造虚拟观测信号，在欠定盲源分离模型的信源数估计和信号分离方面，效果并不理想，分析认为这是由于通过小波分解构造虚拟观测信号，是利用原观测信号的部分信息，构造虚拟的观测信号，并没有增加接收信号中蕴含的信息，也就是并非像真实的天线阵列一样，针对信号的到达角，产生对应的阵列流型。由此得出结论，实现欠定盲源分离问题的解决，仍须依靠非负矩阵分解、张量分解或稀疏分量分析等思路。

参考文献：

- [1] 王川川, 曾勇虎. 欠定盲源分离算法研究现状及展望[J]. 北京邮电大学学报, 2018, 41(6): 103-109.
- [2] 王川川, 曾勇虎, 付卫红, 等. 一种最大密度检测欠定混合矩阵估计算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2019, 46(1): 106-111.
- [3] WANG C C, ZENG Y H, FU W H, et al. Improved Statistically Sparse Decomposition Principle Method for Underdetermined Blind Source Signal Recovery[J]. Journal of China Universities of Posts and Telecommunications, 2019, 26(6): 94-102.
- [4] ONG J, VO B T, NORDHOLM S. Blind Separation for Multiple Moving Sources With Labeled Random Finite Sets[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2021, 29: 2137-2151.
- [5] GANDHI A P, VIJAYAN S. Upgrading Sparse NMF algorithm for Blind Source Separation through Adaptive Parameterized Hybrid Kernel based Approach[J]. Measurement, 2019, 143: 11-21.
- [6] WILDEBOER R R, SAMMALI F, VAN SLOUN R J G, et al. Blind Source Separation for Clutter and Noise Suppression in Ultrasound Imaging: Review for Different Applications[J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2020, 67(8): 1497-1512.
- [7] 魏连友, 朱亚军, 金林彩. 张量秩-($L_r, L_r, 1$)分解算法在机械故障盲源分离中的应用[J]. 机床与液压, 2020, 48(15): 199-203.
- [8] LI Y B, WANG Y F, DONG Q H. A Novel Mixing Matrix Estimation Algorithm in Instantaneous Underdetermined Blind Source Separation[J]. Signal, Image and Video Processing, 2020, 14: 1001-1008.
- [9] MA S, ZHANG H J, MIAO Z Y. Blind Source Separation for the Analysis Sparse Model[J]. Neural Computing and Applications, 2021, 33: 8543-8553.
- [10] BOGGESS A, NARCOWICH F J. 小波与傅里叶分析基础[M]. 2版. 北京: 电子工业出版社, 2017.
- [11] MAX M, KAILATH T. Detection of Signals by Information Theoretic Criteria[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1985, 33(2): 387-392.
- [12] WAX M. Detection and Localization of Multiple Sources via the Stochastic Signals Model[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(11): 2450-2456.
- [13] 甄佳奇. 超分辨测向理论及其性能优化技术[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2018.
- [14] 杨俊杰. 盲信号分离算法分析及其在网络安全技术中的研究[D]. 广州: 广东工业大学, 2017.
- [15] 张小飞, 李建峰, 徐大专, 等. 阵列信号处理及 MATLAB 实现[M]. 北京: 电子工业出版社, 2020.
- [16] AOUDA S, ZOUBIR A M, SEE C M S. Source Detection in The Presence of Nonuniform Noise[C]// ICASSP. 2014: 165-168.
- [17] 冷巨昕. 盲信号处理中信源个数估计方法研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2009.
- [18] 许佳奇, 王川川, 曾勇虎, 等. 基于盖尔圆定理和最小描述长度准则的信源数目估计方法[J]. 信号处理, 2017, 3A: 53-57.
- [19] 余先川, 胡丹. 盲源分离理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011.