

doi: 10.7690/bgzdh.2018.12.009

# 无人纵列式直升机鲁棒保性能控制器

严强强, 盛守照, 林群馥

(南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)

**摘要:** 为解决无人纵列式直升机模型建立的不确定性等问题, 提出一种鲁棒保性能控制器设计方法。以某个转速配平点作为基准状态设计点, 设计鲁棒最优保性能控制器, 并通过仿真实验验证。实验结果表明: 该方法能确保系统具有良好的稳定鲁棒性和性能鲁棒性, 实现姿态响应的整体平滑, 姿态跟随快速, 控制效果良好。

**关键词:** 无人纵列式直升机; 气动模型; 不确定性; 鲁棒保性能控制; 飞行品质

**中图分类号:** TP202 **文献标志码:** A

## Unmanned Tandem Helicopter Robust Guaranteed Cost Controller

Yan Qiangqiang, Sheng Shouzhao, Lin Qunfu

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics &amp; Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of the uncertainty established by the unmanned helicopter model, a robust guaranteed cost controller design method is proposed. Taking certain rotating speed balance point as a normal condition design point, a robust optimal guaranteed safety controller is designed and verified by simulation. The experimental results show that the method can ensure the robust stability and robustness of the system, and achieve the overall smoothness of attitude response, fast attitude follow-up and good control effect.

**Keywords:** unmanned tandem helicopter; aerodynamic model; uncertainty; robust guaranteed cost control; flight quality

### 0 引言

当今, 随着社会发展和军事需求的变化, 纵列式直升机已在战场运输、消防、抢险救灾以及海上救援等领域得到广泛应用, 并受到越来越多军事强国的关注。无人纵列式直升机凭借其重心变化范围大、机身宽敞、载质量大等优点, 成为我国发展重型运输直升机的重要方向之一。与常规无人直升机在结构上的区别是, 无人纵列式直升机没有细长的尾梁, 其一前一后 2 副完全相同的旋翼沿着纵向排列, 分别安装于 2 个桨毂上, 且旋翼转速相同、转向相反用以平衡无人纵列式直升机系统的反扭矩。在无人纵列式直升机前飞过程中, 前旋翼的尾流对后旋翼的气动干扰较为严重, 致其气动环境尤为不利, 因此在设计飞机时, 将后旋翼桨毂基座整体抬高以削弱前旋翼的气动干扰。这种构型的直升机具有重心可调范围大, 相同升力时结构相对紧凑以及悬停效率高等优点。但也存在较多缺点, 由于发动机功率从后方传递到前方, 传动机构相对复杂, 加之无人纵列式直升机的航向控制是通过前后旋翼的差动周期变距来实现, 导致其偏航操纵效率较低。

纵列式直升机的主要型号有 H-21、雅克-24、

波音 360 和 CH-47 等<sup>[1]</sup>, 其中代表机型为 CH-47 支奴干直升机。该机于 1958 年开始研制, 是当前美军中型运输直升机的主力, 曾参加过越南战争、阿富汗战争及海湾战争等军事行动。笔者以无人纵列式直升机为被控对象, 针对模型建立不确定性等问题, 提出一种鲁棒保性能控制器设计方法, 确保系统具体良好的性能鲁棒性和稳定鲁棒性, 并实现姿态响应平滑, 姿态跟随快速。

### 1 模型不确定性描述

为方便对象特性分析和控制系统设计, 通常会在实际对象的建模过程中做适当的理想化或简单化处理; 因此, 通常所建立的数学机理模型与现实被控系统之间具有某些差异, 这就叫作模型不确定性。在鲁棒控制理论中, 可以把现实被控对象用标称模型和不确定模型 2 部分表示。其中, 标称模型表示可利用机理建模或系统辨识得到的已知确定部分, 而不确定模型部分具体用以下 2 种类型来描述<sup>[2]</sup>:

1) 可参数化不确定性。

这一类的模型不确定性问题对系统数学模型的构造不产生影响, 仅仅表现在系统数学机理模型参数的摄动上。当被控对象的数学机理模型用状态空

收稿日期: 2018-10-01; 修回日期: 2018-11-06

基金项目: 航空科学基金(2016ZC52018)

作者简介: 严强强(1993—), 男, 江苏人, 硕士, 从事先进飞行控制研究。

间形式来表示时，模型不确定性可表示为：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \theta) + g(x, \theta)u \\ y = h(x, \theta) + d(x, \theta)u \end{cases} \quad (1)$$

其中： $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p$  分别为状态变量、控制输入和输出变量； $f, g, h, d$  为适当阶次的函数映射；

$\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_s]^T$  为用来描述模型不确定性的未知参数向量。

对于线性系统，可描述成：

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases} \quad (2)$$

其中， $A(\theta) \in R^{n \times n}, B(\theta) \in R^{n \times m}$  是未知参数变量  
 $C(\theta) \in R^{p \times n}, D(\theta) \in R^{p \times m}$

$\theta \in R^s$  的矩阵函数。

$$A(\theta) = A_0 + \Delta A(\theta), B(\theta) = B_0 + \Delta B(\theta) \quad (3)$$

而且， $\Delta A(\theta)$  和  $\Delta B(\theta)$  可写为下式形式，其中  $E_a, F_a, E_b, F_b$  表示已知部分。

$$\begin{cases} \Delta A(\theta) = E_a \sum (\theta) F_a \\ \Delta B(\theta) = E_b \sum (\theta) F_b \end{cases} \quad (4)$$

将  $\Delta C(\theta)$  和  $\Delta D(\theta)$  做类似处理，可得系统模型的一般表示：

$$\begin{cases} \dot{x} = [A_0 + E_a \sum (\theta) F_a]x + [B_0 + E_b \sum (\theta) F_b]u \\ y = [C_0 + E_c \sum (\theta) F_c]x + [D_0 + E_d \sum (\theta) F_d]u \end{cases} \quad (5)$$

2) 非参数不确定性。

这一类的模型不确定性问题不能单单使用系统模型参数的摄动来表达，可用状态的函数摄动来表达模型不确定性问题，那么此时的系统可以用下式表达：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + [g(x) + \Delta g(x)]u \\ y = h(x) + \Delta h(x) + [d(x) + \Delta d(x)]u \end{cases} \quad (6)$$

其中  $f, g, h, d$  和  $\Delta f, \Delta g, \Delta h, \Delta d$  分别为已知或未知的函数向量或矩阵。

若标称模型是线性系统，则对象模型可描述为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \Delta f(x) + [B + \Delta g(x)]u \\ y = Cx + \Delta h(x) + [D + \Delta d(x)]u \end{cases} \quad (7)$$

若  $\Delta f, \Delta g, \Delta h, \Delta d$  也是线性函数，则式(7)可表示为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \Delta Ax + (B + \Delta B)u \\ y = Cx + \Delta Cx + (D + \Delta D)u \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$  表示未知矩阵。

## 2 鲁棒保性能控制的定义

设计鲁棒保性能控制器的核心思想为考虑对象参数不确定性对系统控制品质的影响，通过设计一个满足条件的全维状态反馈控制律，即保证使得闭环系统渐进稳定这一首要条件成立，对象的二次型性能品质不大于一个预定的指标上限<sup>[3]</sup>。通常在设计鲁棒保性能控制律时，可以将其变化成解决 LMI(线性矩阵不等式)对象的可行性问题或者是某个具有 LMI 限制条件的凸优化问题来求解，并能给出其参数化表示。

考虑对象参数不确定性时，闭环系统的数学机理模型可描述成如下形式：

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t), x(0) = x_0 \quad (9)$$

式中： $x \in R^n$  为系统的状态向量； $u \in R^m$  为系统的输入向量； $A, B$  代表标称模型的已知常量矩阵； $\Delta A, \Delta B$  代表对应阶次的不明确量矩阵，假设不明确量矩阵在范数领域上有范围，则可以用下列数学形式来描述：

$$[\Delta A \ \Delta B] = DF(t)[E_1 \ E_2] \quad (10)$$

式中： $D, E_1$  与  $E_2$  用来表征系统参数不确定性的结构信息，为已知的常量矩阵。 $F(t) \in R^{i \times j}$  表示未知的系数矩阵，且满足如下不等式约束条件：

$$F^T(t)F(t) \leq I \quad (11)$$

以上面所描述的不确定性闭环系统(9)来说，选择下式作为二次型性能品质，具体为

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (12)$$

式中  $Q$  和  $R$  是给定的正定对称加权系数矩阵。

定义 1<sup>[4]</sup> 以上面所描述的不确定性闭环系统(9)和二次型性能品质(12)，具有某个  $u^*(t)$  与  $J^*$ ，使得不确定闭环系统对于可能存在的不确定性总是李雅普诺夫渐近稳定的，并且其二次型性能品质具有  $J \leq J^*$  的条件，那么就称  $J^*$  是不确定闭环系统(9)的某个性能品质上限，并且  $u^*(t)$  就被称作是不确定闭环系统(9)满足条件的某个鲁棒保性能控制律。

## 3 纵列式直升机鲁棒保性能控制器设计

在说明鲁棒保性能控制律存在前，先列出几条证明中须要用到的引理：

引理 1<sup>[5]</sup> 给定对称矩阵  $Y$  和矩阵  $D, E$ ，则下式成立：

$$Y + DFE + E^T F^T D^T < 0. \quad (13)$$

如果矩阵  $F$  满足条件  $F^T F \leq I$  时, 具有常数  $\varepsilon > 0$  确保下列表达式得以实现:

$$Y + \varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E < 0. \quad (14)$$

引理 2<sup>[6]</sup> 对于给定的对称矩阵

$$S^T = S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

其中  $S_{11} \in R^{k \times k}$ , 以下 3 个条件等价:

- 1)  $S < 0$ ;
- 2)  $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ ;
- 3)  $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ .

引理 3<sup>[4]</sup> 以上面所描述的不确定性闭环系统(9)和二次型性能品质(12), 如果具有  $P$  和  $K$ , 且矩阵  $P$  为正定矩阵, 让对于可能存在的系统不确定性都确保下列表达式得以实现:

$$Q + K^T R K + P[A + BK + DF(E_1 + E_2 K)] + [A + BK + DF(E_1 + E_2 K)]^T P < 0. \quad (16)$$

那么就称  $u(t) = Kx(t)$  为满足不确定闭环系统(9)条件的某个鲁棒保性能控制律, 对应的一个性能品质上限是  $J^* = x_0^T P x_0$ .

证明: 取控制律  $u(t) = Kx(t)$ , 则相应的闭环系统:

$$\dot{x}(t) = [A + BK + DF(E_1 + E_2 K)]x(t). \quad (17)$$

选取李雅普诺夫函数  $V(x) = x^T P x$ , 沿闭环系统

$$\begin{bmatrix} AZ + BW + (AZ + BW)^T + \varepsilon DD^T & (E_1 Z + E_2 W)^T & Z & W^T \\ E_1 Z + E_2 W & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ X & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ W & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

进而如果矩阵不等式(22)有一个可行解  $(\varepsilon, W, Z)$ , 则

$$u^*(t) = WZ^{-1}x(t). \quad (23)$$

是不确定性闭环系统(9)的某个状态反馈鲁棒保性能控制律, 其对应的系统二次型性能品质上限是

$$\bar{J} \leq \text{Trace}(Z^{-1}) = \bar{J}^*. \quad (24)$$

证明: 取

$$\begin{bmatrix} P(A + BK) + (A + BK)^T P + \varepsilon PDD^T P & (E_1 + E_2 K)^T & I & K^T \\ (E_1 + E_2 K) & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ I & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ K & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (28)$$

(17)的任意轨迹, 对  $V(x)$  关于时间进行求导可得

$$\dot{V}(x) = x^T \{ P[A + BK + DF(E_1 + E_2 K)] + [A + BK + DF(E_1 + E_2 K)]^T P \} x. \quad (18)$$

根据式(16), 有

$$\dot{V}(x) < -x^T (Q + K^T R K)x < 0. \quad (19)$$

可知, 闭环系统(17)是鲁棒渐近稳定的。

下面, 根据闭环系统的渐近稳定性, 对式(19)两边进行从  $0 \sim \infty$  的积分, 由此可得出下列表达式:

$$J = \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \leq V(x(0)) = x_0^T P x_0. \quad (20)$$

根据定义 1 的说明,  $u(t) = Kx(t)$  就是上述不确定性闭环系统(9)的某个鲁棒保性能控制律,  $J^* = x_0^T P x_0$  是相应闭环性能指标的一个上限。

由式(20)可知, 根据引理 3 确定二次型性能品质上限, 取决在不确定闭环系统的初始时刻状态  $x_0$ 。对于实际控制系统, 要想精确获得其初始状态十分困难。为了解决该问题, 可假设不确定闭环系统的初始状态  $x_0$  是满足  $E \{ x_0 x_0^T \} = I$  条件的零均值随机变量。考察系统性能指标的期望可得:

$$\bar{J} = E \{ J \} \leq E \{ x_0^T P x_0 \} = \text{Trace}(P). \quad (21)$$

引理 4<sup>[4]</sup> 对于可能存在的系统不确定性, 具有正定对称矩阵  $P$  和矩阵  $K$ , 确保上述矩阵不等式(16)实现, 有且仅有正定对称矩阵  $Z$ 、矩阵  $W$  以及常数  $\varepsilon > 0$ , 使得下列表达式得以实现

$$Y = Q + K^T R K + P(A + BK) + (A + BK)^T P. \quad (25)$$

则矩阵不等式(16)可写成

$$Y + P D F (E_1 + E_2 K) + (E_1 + E_2 K)^T F^T (P D)^T < 0. \quad (26)$$

有且仅有常数  $\varepsilon > 0$ , 确保下式成立

$$Y + \varepsilon P D D^T P + \varepsilon^{-1} (E_1 + E_2 K)^T (E_1 + E_2 K) < 0. \quad (27)$$

根据引理 2, 式(27)等价于

对矩阵不等式 (28) 分别左乘和右乘  $\text{diag}\{P^{-1}, I, I, I\}$ ，并记  $Z = P^{-1}$ ， $W = KP^{-1}$ ，即可得式(22)。

在一定假设条件下，考虑将无人纵列式直升机的数学机理模型描述成如下形式：

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式中： $x = [V_x, V_y, V_z, \phi, \theta, \psi, \omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  为纵列式直升机的状态向量； $u = [\delta_e, \delta_a, \delta_e^f, \delta_e^r]^T$  为直升机的操纵向量； $A \in R^{9 \times 9}$ ， $B \in R^{9 \times 4}$  表示纵列式直升机某旋翼转速配平点的已知模型参数矩阵； $\Delta A, \Delta B$  是对应阶次的模型参数摄动矩阵<sup>[7]</sup>，具体可描述为：

$$[\Delta A \quad \Delta B] = DF[E_1 \quad E_2] \quad (30)$$

其中： $D$ 、 $E_1$  和  $E_2$  都是属于表征系统不确定性的结构信息的常量矩阵； $F$  为未知的参数矩阵，且满足  $F^T F \leq I$ 。

以旋翼转速为标称转速 270 rad/s 时的飞行状态点为例进行控制律设计，考虑系统的不确定性，选取纵列式直升机模型参数的最大摄动为 20%。选取合适的  $D, F, E_1, E_2$ ，使得矩阵  $\Delta A, \Delta B$  满足式(30)。

在进行无人纵列式直升机鲁棒保性能控制器设计时，选取闭环系统二次型性能品质为：

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (31)$$

式中： $x$  代表无人纵列式直升机的飞行状态向量； $u$  代表其输入控制向量； $Q$ 、 $R$  是给定的正定对称加权矩阵。

根据引理 3，利用 Matlab 的 LMI 工具包，可以很方便地得到在当前转速状态点的无人纵列式直升机鲁棒保性能控制律。

此时系统二次型性能指标的上限  $\bar{J} \leq 579$ 。无人纵列式直升机鲁棒保性能控制律即为不确定闭环系统(29)在给定加权矩阵  $Q$ 、 $R$  与满足线性矩阵不等式约束条件时，满足条件的解。

#### 4 仿真实验

1) 针对直升机前飞速度是 30 m/s、直升机旋翼转速为 270 rad/s 的标称模型  $A$ 、 $B$  及不确定模型  $A + \Delta A$ 、 $B + \Delta B$  和不确定模型  $A - \Delta A$ 、 $B - \Delta B$ ，对其俯仰角给定  $5^\circ$ ，滚转角给定的  $5^\circ$  初值，其余系统的状态变量都设为零，观察直升机的姿态角响应曲线。

2) 针对直升机前飞速度是 30 m/s、旋翼转速为 270 rad/s 的不确定模型  $A + \Delta A$ 、 $B + \Delta B$  和不确定模型  $A - \Delta A$ 、 $B - \Delta B$ ，观察直升机姿态角跟随曲线<sup>[8]</sup>。

图 1、图 2 表明：所设计的鲁棒保性能控制能够保证直升机的俯仰角和滚转角，具有良好的动态响应特性，且没有稳态误差。

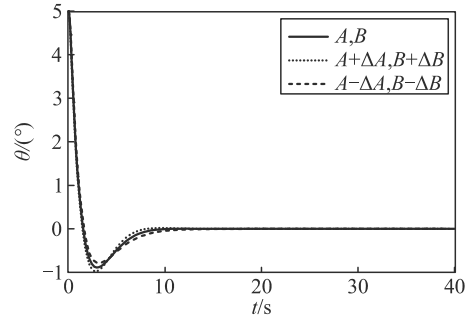


图 1 俯仰角响应曲线

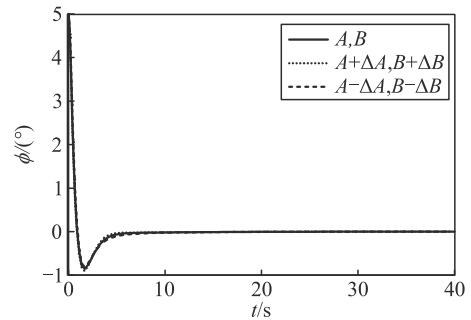


图 2 滚转角响应曲线

图 3—6 表明，姿态角跟踪快速、稳定。同时系统模型的参数摄动对姿态角响应的影响不大，说明控制系统具备良好的稳定鲁棒性。

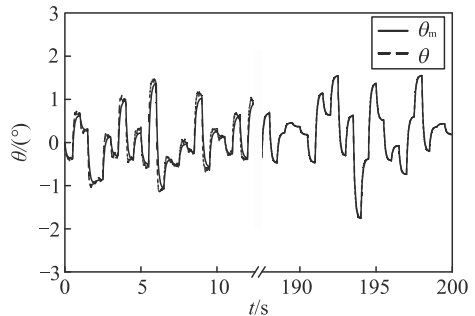


图 3 不确定模型  $A + \Delta A$  俯仰角跟随曲线

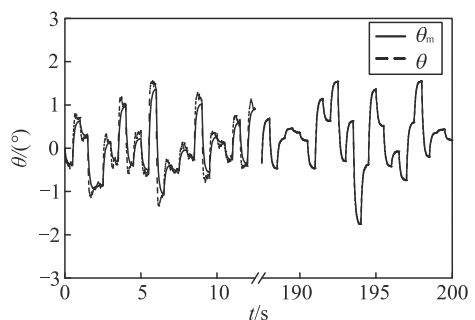


图 4 不确定模型  $A - \Delta A$  俯仰角跟随曲线

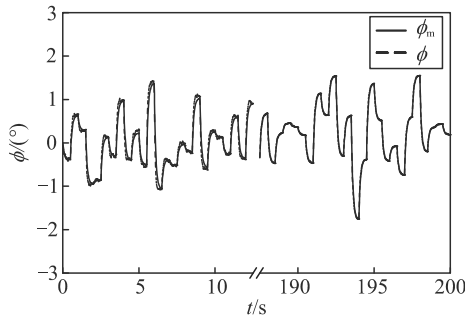


图 5 不确定模型  $A + \Delta A$  滚转角跟随曲线

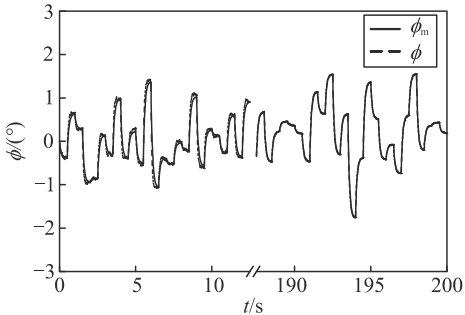


图 6 不确定模型  $A - \Delta A$  滚转角跟随曲线

### 5 结论

鲁棒控制是处理系统存在不确定性或外部扰动时的有效控制方法。针对模型建立不确定性等问题，笔者提出一种鲁棒保性能控制器设计方法，确保了

\*\*\*\*\*

(上接第 33 页)

[8] PARK S. Guidance Law for Standoff Tracking of a Moving Object[C]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017: 2948-2955.

[9] FREW E W, LAWRENCE D A, STEVE M. Coordinated standoff tracking of moving targets using Lyapunov guidance vector fields[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2008, 31(2): 290-306.

[10] Matveev A S, TEIMOORI, H, SAVKIN A V. The problem of target following based on range-only measurements for car-like robots[C]. IEEE conference on decision and control and Chinese control conference, China: Shanghai, 2009: 8537-8542.

[11] ZHANG M, LIU H H T. Cooperative tracking a moving target using multiple fixed-wing UAVs[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2016, 81(3): 505-529.

[12] DEGHAT M, SHAMES I, ANDERSON B D O, et al. Localization and circumnavigation of a slowly moving target using bearing measurements[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(8): 2182-2188.

[13] SONG Z, LI H, CHEN C, et al. Coordinated standoff tracking of moving targets using differential geometry[J]. Journal of Zhejiang University Science C, 2014, 15(4): 284-292.

系统在基准点上具有良好的稳定鲁棒性和性能鲁棒性，实现了姿态响应的整体平滑、姿态跟随快速。最终的数字仿真结果说明了文中控制方法具有良好的控制效果。

### 参考文献:

[1] KEE S G. Guide for Conceptual Helicopter Design[D]. Monterey, CA: Naval Postgraduate School, 1983.

[2] 俞立. 鲁棒控制-线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 122-126.

[3] 高鹏飞, 郑云龙. 某型无人直升机飞行控制系统半实物仿真[J]. 兵工自动化, 2017, 36(6): 90-92.

[4] 梅生伟, 申铁龙, 刘康志. 现代鲁棒控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 64-66.

[5] EL G L, FERON E, BALAKRISHNAN V. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1994: 123-142.

[6] 戴华. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 153.

[7] 王宏强, 王道波, ASHFAQ A M, 等. 无人直升机鲁棒跟踪解耦飞行控制研究[J]. 机械科学与技术, 2009, 28(4): 536-541.

[8] 毛舒存, 肖余培. 混联结构无人直升机六自由度运动模拟平台设计[J]. 兵工自动化, 2017, 36(3): 45-50.

[14] BHARATHI K, NAGARAJ M. Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formula[J]. Indian J. Pure Appl. Math, 1987, 18(6): 507-511.

[15] 吴森堂, 费玉华. 飞行控制系统[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2005: 46-64.

[16] LI Z, HOVAKIMYAN N, DOBROKHODOV V, et al. Vision-based Target Tracking and Motion Estimation Using a Small UAV[C]. 49th IEEE Conference on Decision and Control, USA: Atlanta, 2010: 2505-2510.

[17] DOBROKHODOV V, KAMINER I, JONES K, et al. Vision-based Tracking and Motion Estimation for Moving Targets Using Small UAVs[C]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, USA: Keystone, 2006: 1-12.

[18] SHEVITZ D, PADEN B. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems[J]. IEEE Transactions on automatic control, 1994, 39(9): 1910-1914.

[19] KHALIL H K. Nonlinear Systems [M]. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002: 111-174.

[20] CHANDLER P R, PACTHER M, RASMUSSEN S. UAV cooperative control[C]. American Control Conference. Proceedings of the 2001, Arlington, VA, USA: IEEE, 2001, 1: 50-55.