

doi: 10.7690/bgzd.2018.09.018

## 无验前信息的成败型弹药产品可靠性评估

李翰朋<sup>1</sup>, 宣兆龙<sup>1</sup>, 朱宏<sup>2</sup>

(1. 陆军工程大学弹药工程系, 石家庄 050003; 2. 西安现代控制技术研究所可靠性中心, 西安 710000)

**摘要:** 为有效评估成败型弹药的可靠性, 介绍成败型部件可靠性经典评估方法和 Bayes 评估方法。针对无验前信息的弹药成败型部件可靠性评估问题, 提出采用 3 种常用共轭先验来求其可靠性下限, 并通过数值仿真分析, 得到常用共轭先验分布对可靠度置信下限的影响规律以及每种共轭先验分布的适用情况。结果表明: 3 种共轭先验分布评估得到的结果较为合适, 可为提高弹药可靠性评估的准确性提供支持。

**关键词:** 弹药; 成败型; 验前信息; 可靠性; 评估

**中图分类号:** TJ410.6 **文献标志码:** A

## Reliability Evaluation for Success-or-failure Pattern Ammunition Products Without Prior Information Distribution

Li Hanpeng<sup>1</sup>, Xuan Zhaolong<sup>1</sup>, Zhu Hong<sup>2</sup>

(1. Department of Ammunition Engineering, Army Engineering University, Shijiazhuang 050003, China;

2. Reliability Center, Xi'an Modern Control Technology Research Institute, Xi'an 710000, China)

**Abstract:** In order to effectively evaluate the reliability of ammunition, the classical method and Bayes method of reliability evaluation assessment of success or failure components are introduced. The 3 conjugate prior used for find the lower confidence limit of reliability is proposed for reliability evaluation of ammunition components with no-prior information. And the influence of commonly used conjugate prior distribution on the lower confidence limit of reliability and the application of each conjugate prior distribution are obtained by numerical simulation analysis. The results show that the 3 conjugate prior distributions is more appropriate and can provide support for improving the accuracy of the reliability evaluation ammunition.

**Keywords:** ammunition; success-or-failure pattern; priori information; reliability; evaluation

### 0 引言

产品可靠性评估是指根据产品的可靠性结构和寿命分布模型, 利用试验信息(或现场使用数据), 运用统计学与数学等理论和方法, 求得其可靠性特征量的点估计与区间估计过程。典型的可靠性特征量包括可靠度置信下限和平均故障间隔时间(mean time between failure, MTBF)置信下限等<sup>[1]</sup>。弹药整体往往十分复杂, 由大量的分系统或单元组成, 因此要研究弹药整体可靠性评估问题, 必须先研究单元的可靠性评估。单元寿命分布类型一般有成败型、指数型和 Weibull 型<sup>[2-5]</sup>等。成败型单元是可靠性工程中最常见的寿命分布模型之一, 当单元的试验结果分为成功、失败 2 种情况或仅分为合格和不合格 2 种状态时, 服从二项分布。弹药内有大量成败型单元, 如弹药内的一些火工品、电池组和引信等。对成败型部件可靠性评估的准确性尤为重要。

目前工业与信息技术发展迅猛, 弹药发展也迅

速, 出现了很多新型弹药、新型部件, 没有以往的经验或者历史信息可以参考。在无先验信息的情况下, 如何有效评估其可靠性值得研究。笔者介绍了成败型弹药单元的经典评估方法与 Bayes 评估方法, 针对无验前信息弹药单元可靠性评估问题, 提出了采用 3 种常用共轭先验来求其可靠性下限, 并通过仿真分析了每种共轭先验分布的适用情况。

### 1 成败型单元可靠性的经典评估

设某弹药单元进行了成败型试验, 在得到试验数据 $(n, s)$ 后, 使用极大似然估计法计算部件可靠度 $R$ 。试验数据样本似然函数:

$$L(R) = P\{S = s\} = C_n^s R^s (1-R)^{n-s} \quad (1)$$

式中:  $n$  为试验总次数;  $s$  为试验成功数。

对式(1)两边同时取对数, 得:

$$\ln L(R) = \ln C_n^s + s \ln R + (n-s) \ln(1-R) \quad (2)$$

对  $R$  求导, 令等式结果为零, 可得到似然方程:

收稿日期: 2018-05-24; 修回日期: 2018-07-05

作者简介: 李翰朋(1992—), 男, 辽宁人, 满族, 硕士, 从事弹药试验与可靠性评估研究。

$$\frac{d \ln L(R)}{dR} = \frac{s}{R} - \frac{n-s}{1-R} = 0. \quad (3)$$

解式(3)得到可靠度  $R$  的极大似然估计值:

$$\hat{R} = \frac{s}{n}. \quad (4)$$

在试验总次数  $n$  一定时, 可靠性  $R$  随着试验成功数  $s$  增加而增大, 对于试验数据  $(n, s)$ , 在置信度为  $\gamma$  的情况下, 置信下限  $R_L$  满足:

$$\sum_{k=0}^f C_n^k R_L^{n-k} (1-R_L)^k = 1-\gamma. \quad (5)$$

式中  $f = n - s$  为试验失败次数。

当  $s = n$  时,  $R_L = (1-\gamma)^{1/n}$ ; 当  $s = 0$  时, 式(5)无解, 此时  $R_L = 0$ ; 当  $1 \leq s < n$  时, 则用下面方法求解  $R_L$ 。由于二项分布与  $\beta$  分布有如下关系:

$$\sum_{k=0}^f C_n^k R_L^k (1-R_L)^{n-k} = \frac{1}{B(n-f, f+1)} \int_0^{1-R_L} t^{n-f-1} (1-t)^f dt. \quad (6)$$

其中  $B(n-f, f+1) = \int_0^1 y^{n-f-1} (1-y)^f dy$  为 Beta 函数, 因此可得:

$$R_L = \beta_{1-\gamma}(n-f, f+1). \quad (7)$$

式中  $\beta(R|a, b) = \frac{1}{B(a, b)} R^{a-1} (1-R)^{b-1}$ ,  $0 \leq R \leq 1$ ,  $a, b > 0$ 。

而  $\beta$  分布分位数与  $F$  分布分位数又有如下关系式:

$$\beta_{1-\gamma}(k_1, k_2) = [1 + \frac{k_2}{k_1} F(2k_2, 2k_1; \gamma)]^{-1}. \quad (8)$$

由此可以推出  $R_L$  的求解公式为:

$$R_L = [1 + \frac{f+1}{n-f} F(2f+2, 2n-2f; \gamma)]^{-1}. \quad (9)$$

其中  $F$  分布的分位数可查表获得。通过式(9)可以得到经典估计方法的单元可靠度置信下限  $R_L$ 。目前, 该方法是众多成败型军工产品可靠性评估方法中最常用的, 因为用经典评估方法简单明了, 十分适用于价值低、生产容易、生产量大的弹药部件。针对某些价格昂贵、威力较大、试验较危险的弹药或部件, 很难做充足的试验对其进行可靠性评估, 在这种情况下用经典评估方法求得的可信性特征量就过于保守<sup>[6]</sup>, 不能对单元进行准确的评估, 所以用 Bayes 方法评估成败型部件可靠性得到了发展。

## 2 成败型单元可靠性的 Bayes 评估

用 Bayes 方法对成败型产品可靠性评估时, 常用共轭先验方法来确定验前分布<sup>[7-8]</sup>。

设单元可靠度的共轭先验密度<sup>[9]</sup>为:

$$\pi(R) = \beta(R|s_0, f_0). \quad (10)$$

二项试验为  $(n, s)$ ,  $f = n - s$  为失败次数, 其发生的概率为  $L(s, f|R) = C_n^s R^s (1-R)^f$ , 则  $R$  的验后密度由 Bayes 定理得到:

$$\pi(R|s, f) = \frac{\pi(R)L(s, f|R)}{\int_0^1 \pi(R)L(s, f|R)dR} = \beta(R|s_0 + s, f_0 + f). \quad (11)$$

由式(11)得出单元可靠度的点估计和可靠度置信下限的求解公式:

$$\hat{R} = \int_0^1 R \pi(R|s, f) dR = \frac{s + s_0}{n + s_0 + f_0}; \quad (12)$$

$$\int_0^{R_L} I_{R_L}(s_0 + s, f_0 + f) = 1 - \gamma. \quad (13)$$

其中  $s_0$  和  $f_0$  为先验分布的超参数, 由验前信息得到, 常用求超参数的方法有矩方法、分位数法、经验 Bayes 法和 ML-II 法<sup>[10]</sup>。

## 3 无验前信息弹药可靠性评估方法

从不同的角度可以得到不同先验分布的判定准则, 常见的可用于二项分布的有 Bayes 假设、Jeffreys 法则和 Reformulation 方法等<sup>[11]</sup>。

### 3.1 Bayes 假设

Bayes 假设表述为假定未知参数出现在其可能的取值范围内某一点的概率相等。即: 当未知参数为连续随机变量, 则假定它服从在某一范围内的均匀分布。对于二项分布, 未知参数  $R$  的取值范围是  $[0, 1]$ , 按 Bayes 假设

$$\pi_1(R) = \begin{cases} 1, & 0 \leq R \leq 1 \\ 0, & R > 1 \cup R < 0 \end{cases}. \quad (14)$$

采用 Bayes 假设时, 验前分布密度用 Beta 分布为  $\pi_1(R) = \text{Beta}(1, 1)$ 。

### 3.2 Jeffreys 法则

Jeffreys 提出了建立在 Fisher 信息基础上的方法(也称为 Box-Tiao 技术): 先验分布密度  $\pi(R)$  应满足  $\pi(R) \propto (\det I(\theta))^{1/2}$ 。其中  $I(\theta)$  是 Fisher 信息矩阵<sup>[12]</sup>。

其二项分布的似然函数为:

$$f(X|R) = R^s (1-R)^{n-s}. \quad (15)$$

其中  $0 < R < 1$ 。两边同时取对数, 得:

$$\ln f = s \ln R + (n - s) \ln(1 - R); \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial R^2} = -\frac{s}{R^2} - \frac{n-s}{(1-R)^2}; \quad (17)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial R^2}\right) = \frac{n}{R(1-R)}; \quad (18)$$

$$\pi_2(R) \propto \left[E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial R^2}\right)\right]^{-1/2} \propto R^{-1/2}(1-R)^{-1/2}. \quad (19)$$

则采用 Jeffreys 法则时, 验前分布密度可记为  $\pi_2(R) = \text{Beta}(1/2, 1/2)$ 。

### 3.3 Reformulation 方法

Reformulation 方法也称为朴素的不变性方法。该方法是以考虑问题的统计结构为基本点。详细来说, 改变问题表述方式或者对其进行变换, 如果其统计结构不变, 则改变或变换不会影响参数的无信息验前分布, 那么得到的结果就是:

$$\pi_3(R) \propto R^{-1}(1-R)^{-1}. \quad (20)$$

则采用 Reformulation 方法时, 验前分布密度可记为  $\pi_3(R) = \text{Beta}(0, 0)$ 。

上述 3 种无信息验前分布密度函数中,  $\text{Beta}(0, 0)$  不是正常的密度函数, 不能应用在零失效或零成功的情况, 即现场试验成功数或者失败数为零。

在上述无信息验前分布密度函数的基础上, 根据获得的现场试验数据, 可求得可靠度的验后分布, 进而得出部件单元的可靠度置信下限。

### 3.4 仿真分析

根据上述分析可知, 3 种常用无信息验前分布都具有各自的理论合理性, 但由不同验前分布得到可靠度的点估计及置信下限结果却有差异。在解决具体工程问题时, 选取哪一种先验分布更为合理与准确, 是需要研究的问题。

先验分布分别取  $\text{Beta}(1, 1)$ 、 $\text{Beta}(1/2, 1/2)$  和  $\text{Beta}(0, 0)$ 。对给定的置信度  $\gamma$  和试验结果  $(n, s)$ , 所对应的可靠度下限分别为:  $R_L^1$ 、 $R_L^2$ 、 $R_L^3$ 。下面再通过蒙特卡罗仿真考察  $R_L^1$ 、 $R_L^2$ 、 $R_L^3$  之间的差异, 找出每种先验分布适用的情况。取可靠度真值  $R$  从 0.99~0.60 的若干值, 并在  $R$  取每种值情况下, 样本量  $n$  取从 5~40 的整数, 各产生一组二项分布的随机数。每组 2 000 个, 按上述 3 种先验分布计算可靠度下限  $R_L^1$ 、 $R_L^2$ 、 $R_L^3$  ( $\gamma=0.9$ )。并对每种情况下求得的置信下限  $R_L$  求平均值和冒进比率  $R_M^i$

( $R_M^i > R$  的百分比)。求得  $R_L$  平均值较低, 则表明用该验前分布方法所得到的可靠度置信下限趋于保守; 求得  $R_M^i$  的数值较大, 则表明用该验前分布方法所得到的可靠度置信下限有冒进的势头。由于  $\text{Beta}(0, 0)$  不是正常的密度函数, 不能用于  $s=0$  或  $f=0$  的情况, 为了方便比较使用每种验前分布的差异, 将产生的随机数分成不含零失效和含零失效(全部结果)2 种情形。

图 1 为取  $\text{Beta}(1, 1)$  在含零失效情况下求得  $R_L$  分布, 可见随着可靠度真值  $R$  与试验样本量  $n$  的增大, 可靠度下限  $R_L^1$  增大。图 2 为验前分布取  $\text{Beta}(1, 1)$  的情况下, 在含零失效时求得的置信下限与不含零失效时的差值  $\Delta R_1$ 。由图可见, 随着可靠度真值  $R$  的减小、样本量总数  $n$  的增加,  $\Delta R_1$  的值变小。

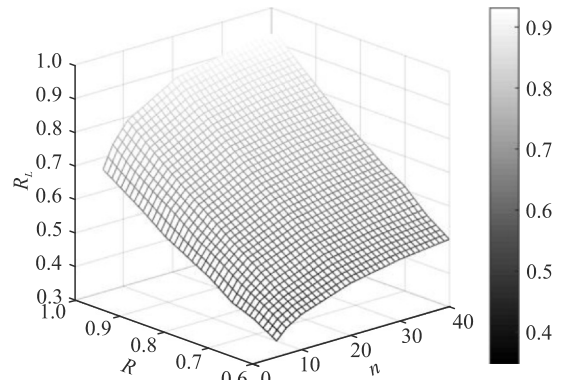


图 1 取  $\text{Beta}(1, 1)$  在含零失效情况下求得  $R_L$  分布

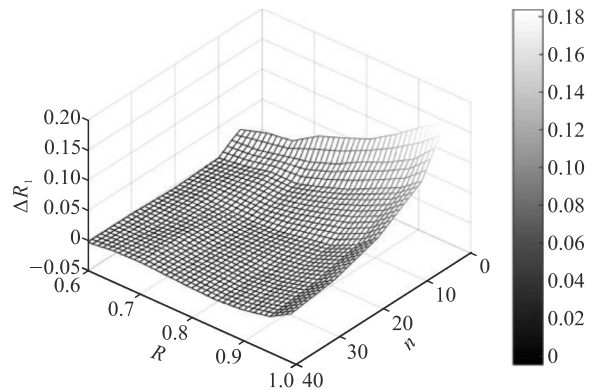


图 2 取  $\text{Beta}(1, 1)$  含零失与不含零失效情况下求得  $R_L$  的差值  $\Delta R_1$

综合分析图 3 与表 1 可知: 在  $R > 0.7$  时,  $R_L^1 < R_L^2 < R_L^3$ , 并且随着总试验数  $n$  的增加, 3 种验前分布求得的可靠性置信下限差异减小。由于篇幅所限, 未列出所有值, 在其他仿真的  $n$  值 ( $n \leq 40$ ) 与  $R$  值 ( $R > 0.6$ ) 范围内, 都具有相同的规律, 说明选取验前分布  $\text{Beta}(0, 0)$  所求得的可靠度置信下限与可靠度真值最相近, 选取其他 2 种验前分布所求得

的可靠度置信下限都比较保守。

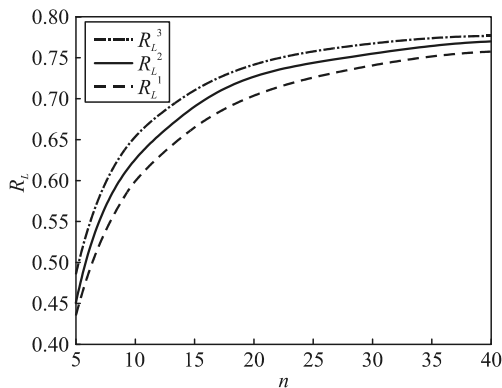


图 3  $R=0.8$ , 不含零失效时求得  $R_L^1$ 、 $R_L^2$ 、 $R_L^3$

表 1 不含零失效  $R_L^1$ 、 $R_L^2$ 、 $R_L^3$  的差异

$n$	$R$	Beta(1,1)	Beta(1/2,1/2)	Beta(0,0)
7	0.7	0.431 7	0.440 6	0.459 2
	0.8	0.493 7	0.519 3	0.540 4
	0.9	0.548 3	0.575 8	0.618 2
20	0.7	0.553 2	0.555 5	0.574 6
	0.8	0.656 5	0.663 7	0.681 3
	0.9	0.752 7	0.776 3	0.795 4

在工程实践中，不能简单选取 Beta(0,0)作为验前分布，还要考虑每种验前分布求得置信下限  $R_L$  的冒进比率。如果求得的置信下限冒进比率较大，对以后弹药的使用，以及人员的安全，甚至战争的成败都会带来巨大影响。

图 4—6 分别为在不同验前分布下求得可靠度置信下限冒进比率的分布图。由图可见，在可靠度真值较高时，求得的置信下限冒进比率都很低，这时可以选取 Beta(0,0)作为验前分布。但在可靠度真值较低时，由不同验前分布求得的置信下限冒进比率差异较大，如  $30 < n < 40$ 、 $0.60 < R < 0.67$  时，虽然由 Beta(0,0)、Beta(1/2,1/2)求得的置信下限比 Beta(1,1)求得的更接近可靠度真值，但是它们求得的置信下限冒进比率较大，此时选取 Beta(1,1)作为验前分布更为合理。

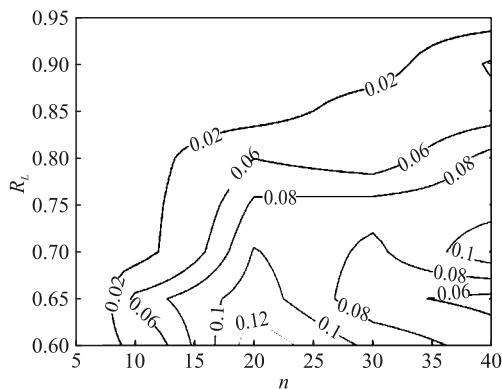


图 4 仿真得  $R_M^1$  数值分布情况

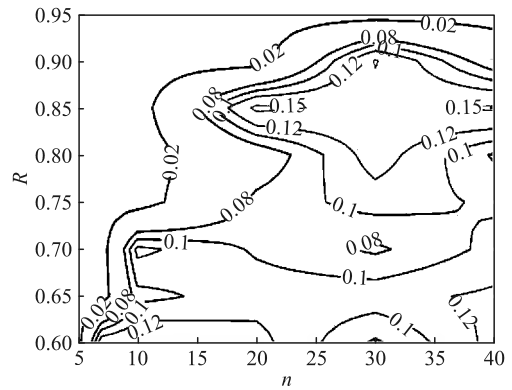


图 5 仿真得  $R_M^2$  数值分布情况

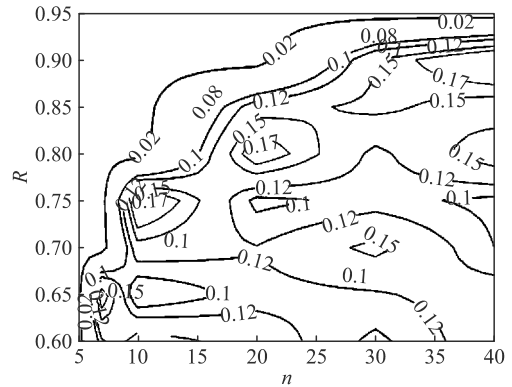


图 6 仿真得  $R_M^3$  数值分布情况

综合分析可得：当可靠度  $R > 0.85$ 、试验总数  $n < 25$  时，采用 Beta(0,0)作为先验分布对可靠性进行评估比较合适；而当可靠度  $R < 0.67$ 、试验总数  $n > 35$  时，采用 Beta(1,1)作为先验分布比较合理；可靠度  $R$  与试验总数  $n$  介于上述二者之间时，大多数采用 Beta(1/2,1/2)，但也要结合实际情况具体分析。

### 4 算例

某新研弹药部件在初样阶段，需对其进行可靠性评估，其无历史信息或相似部件可供参考，其试验结果如表 2。

表 2 某弹药部件试验结果

温度	试验数	成功数	失败数
高温	8	7	1
常温	8	8	0
低温	8	8	0
总计	24	23	1

通过不同方法求解其可靠性置信下限，求解时不考虑环境因子的影响，在置信度  $\gamma=0.9$  时，其可靠性评估结果如表 3。

表 3 可靠性置信下限求解

评估方法	经典方法	Beta(0,0)	Beta(1/2,1/2)	Beta(1,1)
$R_L$	0.847 4	0.904 7	0.876 7	0.853 1

- Robotics & Research, 2001, 15(5): 378-400.
- [9] KARAMAN S, FRAZZOLI E. Optimal kinodynamic motion planning using incremental sampling-based methods[C]//IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2010: 7681-7687.
- [10] JORDAN M, PEREZ A. Optimal Bidirectional Rapidly Exploring Random Trees [Z]. 2013.
- [11] QURESHI A H, MUMTAZ S, IQBAL K F, et al. Triangular geometry based optimal motion planning using RRT\*-motion planner[C]// IEEE, International Workshop on Advanced Motion Control. IEEE, 2014: 380-385.
- [12] QURESHI A H, AYA Z Y. Intelligent Bidirectional Rapidly-exploring Random Trees for Optimal Motion Planning in Complex Cluttered Environments [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2015, 68: 1-11.
- [13] LAVALLE S. Rapidly-exploring random trees: a new tool for path planning[Z]. Research Report, 1998: 293-308.
- [14] ABBADI A, PRENOSIL V. Collided Path Replanning in Dynamic Environments Using RRT and Cell Decomposition Algorithms[J]. 2015, 9055: 131-143.

\*\*\*\*\*

(上接第 73 页)

用经典方法评估置信度 $\gamma=0.9$ 时,求得 $R_L=0.8474$ ,由于新研部件价值高、试验危险性较大,未进行大量试验,导致评估结果较为保守。相比于经典评估方法用 3 种共轭先验分布评估,得到的结果较为合适。对于该部件,试验之前专家建议选用 Beta(0,0)作为验前分布,求得 $R_L=0.9047$ ,后续的正样试验与鉴定试验结果也证明了采用 Beta(0,0)的正确性与优越性。

## 5 结束语

笔者介绍了成败型产品可靠性评估经典方法与 Bayes 方法,指出经典评估方法的不足,并针对无验前信息的成败型弹药部件可靠性评估问题,介绍 3 种常用的验前分布,通过数值仿真研究了在无先验信息情况下, Beta(0,0)、Beta(1/2,1/2)、Beta(1,1)验前分布对可靠性置信下限的影响,得到了 3 种共轭验前分布的适用情况,最后通过算例表明共轭验前分布求无先验信息弹药部件可靠性的优越性。该研究可为弹药可靠性评估提供参考。

## 参考文献:

- [1] 潘勇,黄进永,胡宁. 可靠性概论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2015: 457-458.

- [2] 王学,冯志刚,高普云,等. 寿命型到成败型数据的等效折算[J]. 机械强度, 2009, 31(2): 240-244.
- [3] 张文杰,杨华波,张士峰. 基于 Bayes 混合验前分布的成败型产品可靠性评估[J]. 兵工学报, 2016, 37(3): 505-511.
- [4] 叶豪杰,赵占伟. 采取随机数的指数型系统贮存可靠性仿真评估[J]. 电子产品可靠性与环境试验, 2012, 35(1): 27-29.
- [5] 丁湛,黄双华. 基于威布尔分布的可靠性寿命分布模型的建立[J]. 电子测量技术, 2007, 30(3): 34-35.
- [6] 张丰收,韩尚云,刘建亭,等. 基于 Bayes 理论的重型数控机床可靠性评估方法研究[J]. 现代制造工程, 2015, 36(8): 122-125.
- [7] 张士峰,樊树江,张金槐. 成败型产品的可靠性 Bayes 评估[J]. 兵工学报, 2011, 22(2): 238-240.
- [8] 赵勇,刘建新,牛青坡. 基于混合 Beta 先验分布的成败型产品的可靠性评估[J]. 航空兵器, 2014, 49(6): 59-61.
- [9] 邵宗战,马浩文. 航空深弹实航工作可靠度评定方法[J]. 鱼雷技术, 2015, 23(6): 475-478.
- [10] 玉玮,蔡瑞娇,焦清介. 制导弹药可靠性评定方法的研究[J]. 兵工学报, 2007, 28(7): 800-803.
- [11] 周源泉,翁朝曦. 可靠性评定[M]. 北京: 科学出版社, 1990: 91-92.
- [12] 何劼,张彬彬. 应用 Jeffreys 方法计算可靠性参数和始发事件频率的无信息先验[J]. 原子能科学技术, 2013, 47(11): 2059-2062.