

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2010.07.022

# 快速小波变换在非平稳振动信号分析及实现

屈建社<sup>1,2</sup>, 陈勇<sup>1</sup>, 古康<sup>2</sup>, 黄鹏<sup>2</sup>

(1. 电子科技大学 自动化工程学院, 成都 四川 611731;  
2. 陕西黄河集团有限公司, 西安 陕西 710043)

**摘要:** 为解决大型工业设备振动控制问题, 将快速小波变换分析方法引入到非平稳振动信号分析, 设计了一套基于 ETX+ FPGA 的非平稳振动信号分析系统。通过 FPGA 实现高速流水计算对采集的输入信号进行小波分析, 并由嵌入式计算机 ETX 完成数据采集、处理、控制量形成以及人机交互操作等功能, 在试验室环境下实现了对振动台典型非平稳振动信号的检测处理。试验验证了快速小波变换算法在非平稳振动信号的信号处理方面是可行的, 在硬件系统中具有很好的快速处理性能。

**关键词:** 快速小波变换; 非平稳振动信号; 大型工业设备; FPGA  
**中图分类号:** TP274 **文献标识码:** A

## Analysis and Realization of Fast Wavelet Transform in Non-Stationary Vibration Signal

Qu Jianshe<sup>1,2</sup>, Chen Yong<sup>1</sup>, Gu Kang<sup>2</sup>, Huang Peng<sup>2</sup>

(1. School of Automation Engineering, University of Electronic Science & Technology of China, Chengdu 611731, China;  
2. Shanxi Huanghe Group Co., Ltd., Xi'an 710043, China)

**Abstract:** In order to solve the vibration of large-scale industrial equipment, fast wavelet transform is proposed to analyze non-stationary vibration signal and ETX+FPGA system is designed to it. The sampled input signal is wavelet analyzed on high-speed flow calculations of FPGA and embedded computer realizes data acquisition, processing, control value and human-computer interaction and other functions. Detection processing of typical non-stationary vibration signal of vibration table is realized in the laboratory environment. The experiments of system prove that fast wavelet transform algorithm is feasible in processing of non-stationary vibration signal, and realizes fast in hardware system.

**Keywords:** fast wavelet transform; non-stationary vibration signal; large-scale industrial equipment; FPGA

### 0 引言

振动是自然界普遍存在的一种物理现象, 系统结构设计和应用中必须考虑到振动, 也是其设计领域的核心<sup>[1]</sup>。振动控制的任务是通过振动信号的特征进行辨识, 采用一定的方式方法使受控对象的振动水平满足设计和使用要求。大型工业应用结构系统的振动响应信息十分丰富, 对这类系统的参数如振动频率、振幅及相位的提取等对于描述振动响应的特征, 从而对其实施有效的控制就显得非常重要。由于振动信号为非平稳随机信号, 并夹杂了一定噪声, 仅仅依靠传统的傅立叶变换进行处理是很困难的<sup>[2-4]</sup>。因此需要采用更为有效的算法进行滤波降噪处理, 以便分析和辨识<sup>[5-6]</sup>。

小波变换是二十世纪后期开始发展起来的数学理论, 为振动信号分析提供了强有力的工具, 其多分辨率的时频局部化分析特性使小波变换非常适用于非平稳振动信号的处理分析, 近年来得到了广泛

的研究<sup>[7]</sup>。故将快速小波变换方法引入到非平稳振动信号分析中。

### 1 快速小波变换算法

#### 1.1 快速小波变换理论<sup>[8]</sup>

对任意的函数或者信号  $f(x)$ , 其小波变换定义为

$$W_f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{\psi}(a,b)(x)dx = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \quad (1)$$

这是一个二元函数。在大多数情况下用到的都是离散小波变换。离散小波变换可用图 1 的分解树来描述。

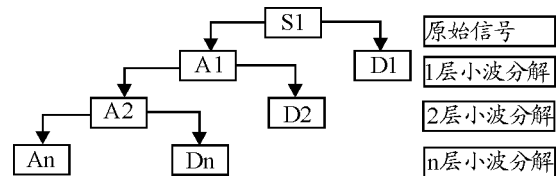


图 1 离散小波变换示意

收稿日期: 2010-03-01; 修回日期: 2010-04-07

基金项目: 教育部博士点专项基金(200806141056); 四川省应用基础研究项目(2009JY0008); 四川省杰出青年基金人才培养计划(09ZQ026-009)

作者简介: 屈建社(1964-), 男, 陕西人, 高级工程师, 从事雷达系统设计、伺服控制、信息分析等研究。

该 S.Mallat 的多分辨率分析 (Multi-Resolution Analysis) 方法针对信号低频部分进一步分解, 对高频部分不予考虑。

在小波分析理论中, 分解的最终目的是构造一个在频率上高度逼近  $L_2(\mathbb{R})$  空间的正交小波基。基于这种思路, Mallat 给出了快速小波变换 (FWT) 的算法。

对于一个多分辨率分析  $\{V^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ,  $\Phi$  和  $\Psi$  分别为相应的尺度函数和小波函数, 函数  $f$  属于由尺度函数  $\Phi$  生成的多尺度分析 (multi\_resolution analysis, MRA) 的基本子空间  $V_0$ 。快速小波算法 (FWT) 可以用如下算式表示:

$$c_0^k = f_k \quad (2)$$

$$d_n^m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} c_k^{m-1} \quad (3)$$

$$k=0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$c_n^m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} c_k^{m-1} \quad (4)$$

其中:

1)  $h_k$  是多分辨率分析的尺度系数,  $g_k$  是多分辨率分析的小波系数, 两者的关系是:

$$g_n = (-1)^n h_{2k+1-n}, k \in \mathbb{Z};$$

2)  $d_n^m$  和  $c_n^m$  分别是函数  $f$  在第  $m$  层尺度上的小波分解系数和尺度逼近系数;

3) 在以计算机和 FPGA 为核心的实际应用中, 不存在连续函数, 均采用分析信号的离散采样序列

$f_k$ 。当采样率相当高时, 信号的采样就非常近似于展开系数  $c^0$ 。

对上面两式进行下标变换可得

$$c_n^m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} c_k^{m-1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l c_{2n+l}^{m-1} \quad (5)$$

$$d_n^m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} c_k^{m-1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l c_{2n+l}^{m-1} \quad (6)$$

为了表达简单, 用如下通式:

$$z(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(l) \cdot x(l+2k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

输入序列定义为  $x(k)$ , 尺度展开系数为  $z(k)$ , 而滤波器系数为  $f(l)$  (包括尺度系数  $h(l)$  和小波系数  $g(l)$ )。

如果输入序列的长度为  $N=2^u$ ,  $u \in \mathbb{Z}^+$ , 则  $z(k)$  的长度随着尺度的增加而不断地被二等分; 因此下标  $k$  的范围是:  $0, \dots, \frac{N}{2}-1$ 。这样, 就可以通过

Mallat 算法计算某个尺度值: 将系数序列放至输入序列的开头, 各个系数与相应的输入值相乘再累加, 最后所得的乘积之和就是输出序列上的第一个值, 然后将系数序列右移 2 个单元并继续计算就得到第二个值。依次类推, 直到系数序列跳出输入序列的范围, 此时, 为了使每个系数都能够与输入序列中的值相乘, 可以把输入序列开始部分的数值循环到序列的结尾用于计算。一个完整输入数据序列计算完成后, 得到的输出序列就是进行下一个尺度计算所需的输入序列。

快速小波变换算法 (FWT) 实现的原理如图 2。

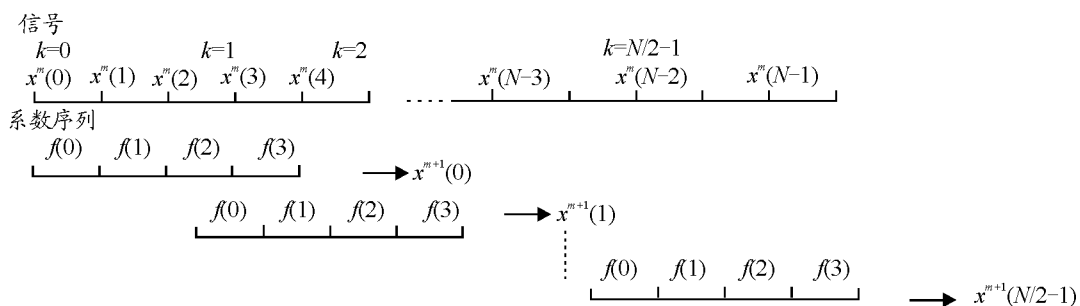


图 2 快速小波算法(FWT)算法的原理图

## 1.2 滤波器系数的求解

在快速小波变换算法 (FWT) 中, 尺度系数  $h(l)$  和小波系数  $g(l)$  的选择是至关重要的。采用 Daubechies 算法来求解尺度系数  $h(l)$  和小波系数  $g(l)$ 。该算法是由 Daubechies 首先提出, Daubechies 提出选择滤波器  $H(w)$  为三角多项式, 即  $H(w)=$

$\sum_k h(k)e^{-jwk}$ , 其中尺度系数  $h(k)$  为实数。可将  $H(w)$  表示成以下形式:  $H(w)=[(1/2)(1+e^{-jw})]^N Q(e^{-jw}), N \in \mathbb{Z}^+$ 。

通过推导, 可得到尺度系数和小波系数的关系为

$$g(k) = (-1)^k h(2N-k-1), k=0, 1, \dots, 2N-1. \quad (7)$$

当  $N=2$  时, 可得滤波器  $H(w)$  的表达式为:

$$H(w) = \left[ \frac{1}{2}(1 + e^{-jw}) \right]^2 \left[ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})e^{-jw} \right]$$

又由  $H(w) = \sum_{k=0}^3 \frac{h(k)}{\sqrt{2}} e^{-jwk}$ , 可以求出尺度系数  $h(k)$  值为:

$$h(0) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h(1) = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h(2) = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h(3) =$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

再根据  $g(k)$  和  $h(k)$  的关系可以得到小波系数  $g(k)$  的值为

$$g(0) = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad g(1) = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad g(2) = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

$$g(3) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

利用该方法, 还可以求出  $N=3, 4, \dots$  情况下的尺度系数  $h(k)$  和小波系数  $g(k)$  的值<sup>[4]</sup>.

采用 Daubechies4 小波 (即  $N=4$ ), 小波分解的尺度  $l=3$ .

## 2 振动信号处理系统设计

### 2.1 仿真试验分析

模拟非平稳振动信号, 计算滤波器系数, 并利用快速小波变换算法对其进行三层分解, 得到仿真试验结果. 其处理流程及仿真结果如图 3.

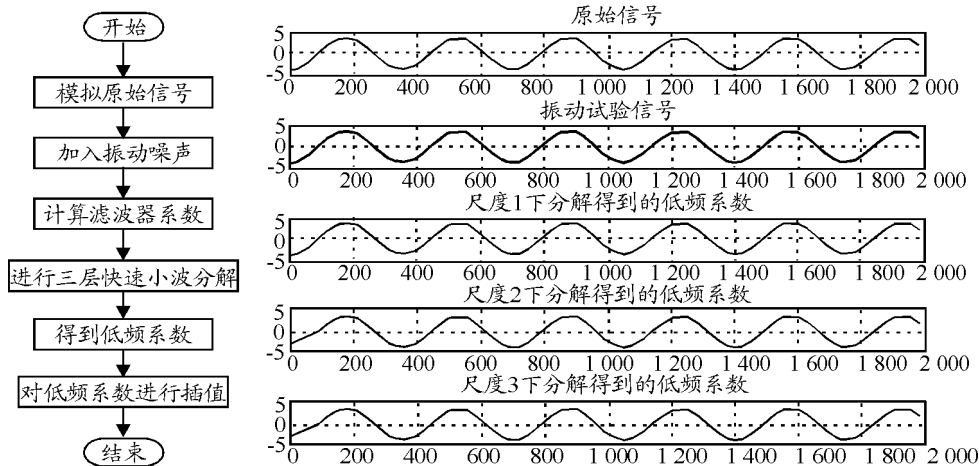


图 3 仿真流程及结果

为了表明快速小波变换算法对非平稳振动信号噪声消除的有效性, 将利用其得到的去噪结果与传统阈值去噪法的结果进行比较, 如图 4、表 1. 将原始信号作为标准信号  $x(i)$ , 则经小波降噪后的估计信号  $\hat{x}(i)$  的信噪比 SNR 定义为:

$$SNR = 10 \lg \left[ \frac{\sum_{i=1}^n x^2(i)}{\sum_{i=1}^n (x(i) - \hat{x}(i))^2} \right] \quad (7)$$

原始信号与降噪信号之间的均方根误差 RMSE 定义为:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x(i) - \hat{x}(i))^2} \quad (8)$$

信号的信噪比 SNR 越高, 原始信号与估计信号的均方根误差 RMSE 越小, 则降噪效果越好. 由此可知: 利用 FWT 算法对非平稳振动信号进行处理可得到较好的去噪效果.

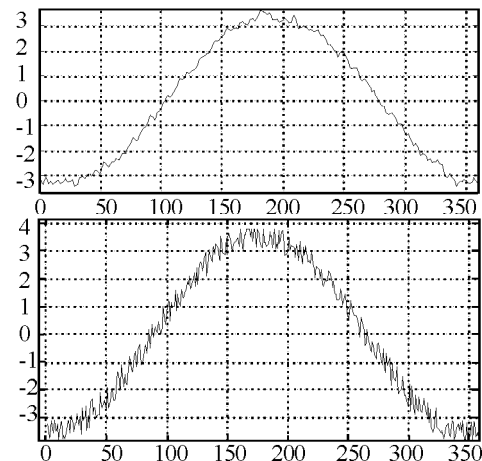


图 4 利用 FWT 算法去噪与传统阈值去噪结果的比较

表 1 利用 FWT 算法去噪与传统阈值去噪比较

去噪方法	SNR	RMSE
传统阈值法	11.417 5	0.688 4
利用 FWT 去噪方法	19.393 8	0.274 8

### 2.2 振动信号处理试验

在仿真试验基础上, 设计了振动信号处理试验的硬件系统. 系统以嵌入式计算机 ETX+大规模可

编程器件 FPGA 为核心<sup>[9]</sup>, 通过 FPGA 实现高速流水计算对采集的输入信号进行小波分析, 并由嵌入式计算机 ETX 完成数据录取、处理、控制量形成以及人机交互操作等功能, 其系统功能如图 5。

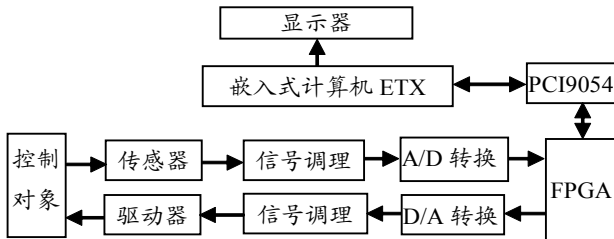


图 5 应用系统功能框图

图 6 为应用试验系统实物图片, 该系统为一台专用试验机箱, 内部安装一块数据采集处理板和一块 ETX 计算机板, 其中数据采集处理板完成振动信号的采集、FPGA 小波变换处理以及控制信号输出, ETX 计算机板完成板间数据采集通讯、处理结果显示以及振动台 PID 控制计算输出。

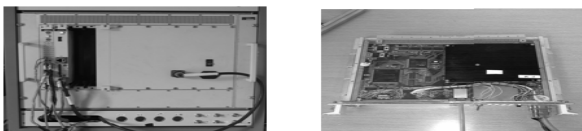


图 6 应用系统实物图片

该系统的工作过程是: 控制对象产生的振动信号通过固定在振动台上的传感器进行检测并放大形成模拟量, 该模拟信号经由 A/D 转换电路采样形成离散化数字量序列进入 FPGA, 使用 FPGA 内部的高速乘法累加器进行快速小波变换实现滤波消噪处理, 其中变换所需的尺度系数  $h(l)$  和小波系数  $g(l)$  以常数数据表的形式存放在 FPGA 之中, 变换后的各个尺度下的输出数据序列由时钟驱动打入到 FPGA 内部设置的 FIFO 中, 供运行于 ETX 计算机板的上位机控制软件通过 PCI 接口进行读取、处理和显示, 该软件同时计算形成输出控制量并通过 PCI 接口写入到 FPGA 内部设置的 FIFO 中, 由 FPGA 整序后通过 D/A 转换有序输出并放大, 驱动振动台形成位移从而达到闭环控制目的。

### 3 试验结果分析

试验过程是在试验室中使用信号发生器产生正弦振动信号并加入噪声, 而后将该信号通过与之相连的功放输入到振动台, 由研制的应用系统进行闭环控制, 同时, 试验过程中该系统实时采集原始信号以及小波变换 3 个尺度下的输出数据序列并进行图形显示输出, 其中为了降低 FPGA 设计复杂度, 对于快速小波变换后的输出数据并未进行插值处理, 而是直接提取其低频系数。

原始振动信号与 3 个尺度下经过 Daubechies4

小波三层分解后得到的信号如图 7。

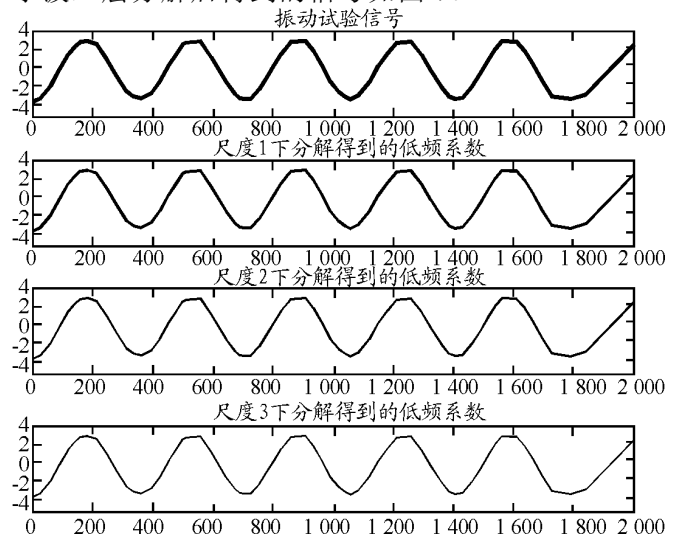


图 7 原始振动信号与 3 个尺度下分解得到的信号

由图 3 可以明显看出, 与理论仿真分析结果相类似, 对于包含有典型噪声信号和振动台机械传动噪声, 其频率分量较为复杂的振动试验信号, 当小波分解到第三层时, 原始振动信号的低频逼近信号明显变得较为光滑, 这表明在实际应用中小波分解可以有效地消除信号中的高频噪声。

### 4 结论

通过对原始振动信号与 3 个尺度下经过 Daubechies4 小波进行分解后得到的信号进行比对分析, 可知小波分析算法在非平稳随机信号的处理方面具有一定的优点。

### 参考文献:

- [1] 魏明祥. 智能结构振动特征信息提取与响应向量重构控制的研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2001.
- [2] CHEN Xi-yuan. Modeling Random Gyro Drift by Time Series Neural Networks and by Traditional Method[J]. IEEE Int Conf Neural Networks & Signal Processing, 2003, 2(3): 810-813.
- [3] Roberts, G.; Zoubir, A.M.; Boashash, B. The Generalised Sequentially Rejective Bonferroni Test Applied to Non-Stationary, Random Signal Classification[C]., IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics Oct.14-17, 1996: 2728-2732.
- [4] 王宏禹. 非平稳随机信号分析与处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999: 12-18.
- [5] Martin N. An AR Spectral Analysis of Non-stationary Signal[J]. Signal Processing, 1986, 10(1): 61-74.
- [6] 张海勇, 李勤. 非平稳随机信号参数模型分析方法[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(3): 386-390.
- [7] 王其, 徐晓苏. 快速小波变换及其在光纤陀螺信号处理中的应用[J]. 大连海事大学学报, 2007, 33(4): 10-13.
- [8] 张秀峰, 郑立男, 施克仁. 旋转角序列小波分析快速算法[J]. 自动化学报, 2003, 29(4): 524-530.
- [9] 吴多, 程德福. 基于 DSP 的快速小波分解与重构[J]. 吉林大学学报: 信息科学版, 2004, 22(3): 214-218.