doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2010.02.010

数理统计方法在弹道一致性评定中的应用研究

尹江丽，侯妍
（装备指挥技术学院 基础部，北京 101416）

摘要：针对炮弹弹道一致性评定方法存在的问题，利用数理统计学中的经典方法，推导出两类风险与用弹量的函数关系；利用靶场先验信息，提出弹道一致性试验的 Bayes 评定方法，为指导试验、减少试验用弹量，提高试验质量提供了依据。

关键词：数理统计；弹道一致性；Bayes 方法
中图分类号：O212　　**文献标识码**：A

Application of Mathematical Statistics on Ballistic Consistency Assessment

YIN Jiang-li, HOU Yan
(Dept. of Basic Theories, Institute of Command & Technology of Equipment, Beijing 101416, China)

Abstract: Aiming at the problems of ballistic consistency assessment, Deduce function relation between the two risks and the sample size by means of classical mathematical statisticals method. Applying shooting range prior information, a Bayesian method of ballistic consistency assessment is presented. The method can guide test, reducing test samples and improve test quality.

Keywords: Mathematical statistics; Ballistic consistency; Bayes method

0 引言

高技术武器价格昂贵，试验耗资巨大，为了节省费用、提高试验效益、减少试验次数、提高试验质量、缩短试验周期，必须探讨试验评定方法。在炮弹研制、试验和改进过程中，需要判断 2 种弹型、弹质或初速差别不大的试验品的外弹道性能是否有差异，或一种制式品经过改进后能否用原来的射表，这都需要进行弹道一致性检验。故对数理统计方法在弹道一致性评定中的应用进行研究。

1 主要解决的问题

评定方法中主要解决两方面的问题：

1) 用弹量的选取问题。由统计学知识知道，样本量 n 与一类风险 α 和二类风险 β 存在一定的关系，故只有先分析用弹量 n 与 α、β 间的函数关系，才能在限定的 α、β 下权衡得到合适的用弹量。

2) 充分利用试验数据的问题。对于高技术武器装备的试验，由于价格昂贵，只能进行小样本试验，对试验数据利用得越充分，则评定的精度就会越高。由于 Bayes 方法相比经典方法性能优越，其特点是能充分运用验前信息，将验前数据和试验数据有机结合，从而降低试验次数、提高试验精度。故一般都使用 Bayes 方法作小子样统计推断。

2 两类风险与用弹量的关系

2.1 被试弹与标准弹的 μ 与 μ_0 的比较

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_1: \mu \neq \mu_0$$

H_0 成立时 $X \sim N\left(\mu_0, \sigma^2\right)$　$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

$$\alpha = P\left\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0\text{成立}\right\} = P\left\{\left|\bar{X} - \mu_0\right| > \delta \mid H_0\text{成立}\right\}$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\mu_0-\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma/\sqrt{n}} \cdot \exp\left\{\frac{-\left(\bar{x}-\mu_0\right)^2}{2\left(\sigma/\sqrt{n}\right)^2}\right\} \mathrm{d}\bar{x}$$

即得一类风险与用弹量的关系。

同理：$\beta = P\left\{\left|\bar{X} - \mu_0\right| < \delta \mid H_1\text{成立}\right\}$

由于 H_1 成立，故此时样本 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

其中，$\mu = \mu_0 + \varepsilon \qquad \bar{X} \sim N(\mu_0 + \varepsilon, \dfrac{\sigma^2}{n})$

则 $\beta = \displaystyle\int_{\mu_0-\delta}^{\mu_0+\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma/\sqrt{n}} \exp\left\{\frac{-\left(\bar{x}-\mu_0-\varepsilon\right)^2}{2\left(\sigma/\sqrt{n}\right)^2}\right\} \mathrm{d}\bar{x}$。即得二类风险与用弹量的关系。

由于这种情况下是被试弹与标准弹的对比，而标准弹的各项参数都已知，故在实际应用中将标准弹的表定方差代入上面的公式即可算得对应两类风

收稿日期：2009-09-24；修回日期：2009-10-20
作者简介：尹江丽（1970-），女，河北人，副教授，1999 年硕士毕业于国防科技大学，从事系统工程、基础数学研究。

险的用弹量。

2.2　2 个一般总体的均值比较

当判断 2 种弹型、弹质或初速差别不大的试验品的外弹道性能是否有差异时，需要研究 2 个总体的均值比较。

设 2 个总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，其中 $(X_1, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, \cdots, Y_n)$ 分别是 X 和 Y 的样本：

1) 当 σ^2 已知时

$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(0, (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})\sigma^2)$，（$H_0$ 成立）。

$$\alpha = P\left\{ |\bar{X} - \bar{Y}| > \delta \mid H_0\text{成立} \right\} =$$

$$2\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma \Big/ \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \exp\left\{ \frac{-x^2}{2\sigma^2(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})} \right\} \mathrm{d}x$$

$$\beta = P\left\{ |\bar{X} - \bar{Y}| < \delta \mid H_1\text{成立} \right\} =$$

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma \Big/ \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \exp\left\{ \frac{-(x-\varepsilon)^2}{2\sigma^2(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})} \right\} \mathrm{d}x;$$

其中 $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\varepsilon, (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})\sigma^2)$（当 H_1 成立时）。

2) σ^2 未知时

由 $\dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$ 其中，

$$S_w^2 = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 \right]。$$

当 H_0 成立时

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

$$\alpha = P\left\{ |\bar{X} - \bar{Y}| > \delta \mid H_0\text{成立} \right\} = 2\int_{-\infty}^{b} t(x, N)\,\mathrm{d}x$$

其中，$b = \dfrac{-\delta}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$。

$$t(x, N) = \frac{\Gamma(\frac{N+1}{2})}{\sqrt{N\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{N}\right)^{\frac{N+1}{2}}, -\infty < x < +\infty$$

$$N = m + n - 2$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

H_1成立时：$\mu_1 - \mu_2 = \varepsilon$

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \varepsilon}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

$$\beta = P\left\{ |\bar{X} - \bar{Y}| < \delta \mid H_1\text{成立} \right\} = \int_a^b t(x, N)\,\mathrm{d}x$$

其中：$a = \dfrac{\delta - \varepsilon}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$，$b = \dfrac{-\delta - \varepsilon}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$。

在 2 个一般总体的比较中，如果方差已知，则代入相应的方差就可算出用弹量；如果方差未知，则可用类似序贯检验的方法：一边做试验，一边计算相应样本的方差，一边将其代入上面的公式算出当前用弹量下的两类风险，当算得的两类风险与需求相符时，则停止试验，此时得到的用弹量合理。

3　弹道一致性试验的 Bayes 评定方法

炮弹弹道一致性试验包括单发交替对比试验，成组交替对比试验和针对表定值的试验。

成组交替对比射击是被试弹药与标准弹药在一定射角下，每个射程上各试验 3 组，计算各组的射程平均值，然后检验其试验结果是否一致。试验时，采用被试弹药与标准弹药在相同火炮上，配用相同的发射装药号，以相同的射角进行单组交替对比射击，考核 2 种弹药平均弹道是否一致。

假设 2 种弹的试验结果为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_m$，且分别来自总体 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 和 $N(\mu_y, \sigma_y^2)$，要检验 $H_0: \mu_x = \mu_y$ 是否成立，应分 3 种情况加以考虑：

1) σ_x^2 和 σ_y^2 均为已知；

2) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$，但 σ^2 的值未知；

3) σ_x^2 和 σ_y^2 均未知，且不知 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ 是否成立。

3.1　方差已知的情况

对上述 2 个总体，当 σ_x^2 和 σ_y^2 均为已知时，只需要检验均值是否相等。

假设 μ_x 有先验分布密度 $N(\mu_{x0}, \sigma_{x0}^2)$，则 μ_x 的后验分布为 $N[\mu(x), \sigma(x)]$，其中：

$$\mu(x)=\frac{\sigma_x^2/n}{\sigma_{x0}^2+\sigma_x^2/n}\cdot\mu_{x0}+\frac{\sigma_{x0}^2}{\sigma_{x0}^2+\sigma_x^2/n}\cdot\bar{X}_n$$

$$\sigma(x)=\frac{\sigma_{x0}^2\sigma_x^2}{n\sigma_{x0}^2+\sigma_x^2}$$

同理，假设 μ_y 有先验分布密度 $N(\mu_{y0},\sigma_{y0}^2)$

则 μ_y 的后验分布为 $N[\mu(y),\sigma(y)]$，其中 $\mu(y)$ 和 $\sigma(y)$ 的表达式类似于 $\mu(x)$ 和 $\sigma(x)$。

令 $\theta=\mu_x-\mu_y$，由于 X、Y 相互独立，所以 θ 的后验分布为 $N[\mu(x)-\mu(y),\sigma(x)+\sigma(y)]$。

若假设检验

$$H_0:\left|\mu_x-\mu_y\right|\le C$$

$H_1:\left|\mu_x-\mu_y\right|>C$，其中，$C$ 为小量，$C\ge 0$。

则 $P(H_0)=P(\theta\le C\left|X,Y\right.)-P(\theta<-C\left|X,Y\right.)$

$$P(H_1)=2P(\theta<-C\left|X,Y\right.)$$

根据概率比判断接受还是拒绝原假设，从而判断 2 种弹的弹道是否一致。

3.2 方差未知且相等

对于上述 2 个总体，当 $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma^2$，但 σ^2 的值未知时，令 $\sigma^2=D$。

假设验前分布信息为：

$$\pi(D)\propto D^{-(\beta_0+1)}e^{-\frac{\alpha_0}{D}}$$

$$\pi(\mu_x\mid D)\propto D^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(\mu_x-\mu_{x0})^2}{2\eta_{x0}D}}$$

$$\pi(\mu_y\mid D)\propto D^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(\mu_y-\mu_{y0})^2}{2\eta_{y0}D}}$$

其中，α_0、β_0、η_{x0}、μ_{x0}、η_{y0}、μ_{y0} 均可由验前样本确定。则 $\pi(\mu_x,\mu_y,D)\propto D^{-(\beta_0^{'}+1)}e^{-\frac{\alpha_0^{'}}{D}}$。

其中，$\alpha_0^{'}=\alpha_0+\dfrac{(\mu-\mu_{x0})^2}{2\eta_{x0}D}+\dfrac{(\mu-\mu_{y0})^2}{2\eta_{y0}D}$

$\beta_0^{'}=\beta_0+1$。

假设 $u_x=S_x^2$、$u_y=S_y^2$ 分别为 X、Y 的样本方差，又因为：

$$\pi(\bar{X}_n\mid\mu_x,D)\propto D^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{n(\bar{X}_n-\mu_x)^2}{2D}}$$

$$\pi(u_x\mid\mu_x,D)\propto u_x^{-\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{(n-1)u_x}{2D}}D^{-\frac{n-1}{2}}$$

相仿可表示出 $\pi(\bar{Y}_m\left|\mu_y,\right.D)$ 和 $\pi(u_y\left|\mu_y,\right.D)$。因此，有：

$$\pi(u_x,u_y,\bar{Y}_m,\bar{X}_n\mid\mu_x,\mu_y,D)\propto u_x^{-\frac{n-3}{2}}u_y^{-\frac{m-3}{2}}D^{-\frac{m+n}{2}}e^{-\frac{Q}{2D}}$$

其中：

$$Q=(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2+n(\bar{X}_n-\mu_x)^2+m(\bar{Y}_m-\mu_y)^2$$

于是 $\pi(\mu_x,\mu_y,D\mid u_x,u_y,\bar{Y}_m,\bar{X}_n)\propto D^{-(\beta_1+1)}e^{-\frac{\alpha_1}{D}}$。

其中，$\beta_1=\beta_0^{'}+\dfrac{m+n}{2}$，$\alpha_1=\alpha_0^{'}+\dfrac{1}{2}Q$。

对 D 积分得：$\pi(\mu_x,\mu_y\mid u_x,u_y,\bar{Y}_m,\bar{X}_n)\propto\alpha_1^{-\beta_1}$

$$\propto\left\{1+\frac{1}{2A}\left[(n+n_0)(\mu_x-\mu_{x0}^{'})^2+(m+m_0)(\mu_y-\mu_{y0}^{'})^2\right]\right\}^{-\beta_1}$$

其中，$n_0=\dfrac{1}{\eta_{x0}}$，$m_0=\dfrac{1}{\eta_{y0}}$。

$$A=\alpha_0+\frac{n_0}{2}\mu_{x0}^2+\frac{m_0}{2}\mu_{y0}^2+\frac{n-1}{2}S_x^2+\frac{m-1}{2}S_y^2+\frac{n\bar{X}_n^2}{2}+\frac{m\bar{Y}_m^2}{2}-\frac{(n_0\mu_{x0}+n\bar{X}_n)^2}{2(n+n_0)}-\frac{(m_0\mu_{y0}+m\bar{Y}_m)^2}{2(m+m_0)}$$

$\mu_{x0}^{'}=\dfrac{n_0\mu_{x0}+n\bar{X}_n}{n+n_0}$，$\mu_{y0}^{'}=\dfrac{m_0\mu_{y0}+m\bar{Y}_m}{m+m_0}$

令 $\begin{cases}\theta=\mu_x-\mu_y\\ \xi=\mu_y\end{cases}$

$$\pi(\theta,\xi\mid u_x,u_y,\bar{Y}_m,\ \bar{X}_n)$$

$$\propto\left\{1+\frac{1}{2A}\left[(n+n_0)(\theta+\xi-\mu_{x0}^{'})^2+(m+m_0)(\xi-\mu_{y0}^{'})^2\right]\right\}^{-\beta_1}$$

对 ξ 积分，可得：

$$\pi(\theta\mid u_x,u_y,\bar{Y}_m,\bar{X}_n)$$

$$\propto\left\{1+\frac{j}{2A}\left[\theta-(\mu_{x0}^{'}-\mu_{y0}^{'})\right]^2\right\}^{-(\beta_0+\frac{m+n-2}{2})}$$

其中，$j=\dfrac{(m+m_0)(n+n_0)}{m+m_0+n+n_0}$。

取 $t=\dfrac{\theta-(\mu_{x0}^{'}-\mu_{y0}^{'})}{\sqrt{\dfrac{2A}{m+n+m_0+n_0-2}}}\sqrt{j}$

$$v=m+m_0+n+n_0-2$$

则：$\pi(t\mid u_x,u_y,\bar{Y}_m,\bar{X}_n)\propto\left\{1+\dfrac{t^2}{v}\right\}^{-(\frac{v+1}{2})}$。

可见，当 $m_0=0,n_0=0$ 时，上式与古典方法的结果完全一样。$m_0\neq 0,n_0\neq 0$ 时，2 种方法的结果有一样的形式，不同的是 Bayes 方法包含了更多的信息。在统计中，样本数越大，统计结果越精确。如果在相同的精度下，运用先验信息可以减小试验的用弹量；在规定的试验数下，运用先验信息可以提高试验质量。

3.3　方差未知且不等

当 σ_x^2 和 σ_y^2 均未知，也不知 $\sigma_x^2=\sigma_y^2$ 是否成立时，不但要检验均值是否相等，还要检验方差是否相等。由于 2 个总体相互独立，所以，先求单个总体的边缘密度，然后再复合，进行一致性检验。

对于总体 X，假设 $\pi(D_x)\propto D_x^{-(\beta_{x0}+1)}e^{-\frac{\alpha_{x0}}{D_x}}$，

$\pi(\mu_x\mid D_x)\propto D_x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(\mu_x-\mu_{x0})^2}{2\eta_{x0}D_x}}$。

则 $\pi(\mu_x,D_x)\propto D_x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(\mu_x-\mu_{x0})^2}{2\eta_{x0}D_x}}D_x^{-(\beta_{x0}+1)}e^{-\frac{\alpha_{x0}}{D_x}}$。

又似然函数为：

$$\pi(\bar{X}_n,u_x\mid\mu_x,D_x)\propto D_x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{n(\bar{X}_n-\mu)^2}{2D_x}}D_x^{-\frac{n-1}{2}}u_x^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{nu_x}{2D_x}}$$

故 $\pi(\mu_x,D_x\mid\bar{X}_n,u_x)\propto D_x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(\mu_x-\mu_{x1})^2}{2\eta_{x1}D}}D_x^{-(\beta_{x1}+1)}e^{-\frac{\alpha_{x1}}{D_x}}$ 其中

$$\begin{cases}\eta_{x1}=\dfrac{\eta_{x0}}{1+n\eta_{x0}}\\ \mu_{x1}=\dfrac{n\bar{X}_n+\mu_{x0}/\eta_{x0}}{n+1/\eta_{x0}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_{x1}=\alpha_{x0}+\dfrac{nu_x}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n(\bar{X}_n-\mu_{x0})^2}{n\eta_{x0}+1}\\ \beta_{x1}=\beta_{x0}+\dfrac{n}{2}\end{cases}$$

边缘密度为：

$$\pi(\mu_x\mid\bar{X}_n,u_x)\propto\left[1+\frac{1}{2\alpha_{x1}\eta_{x1}}\right]^{-\frac{2\beta_{x1}+1}{2}}$$

$$\pi(D_x\mid\bar{X}_n,u_x)\propto D_x^{-(\beta_{x1}+1)}e^{-\frac{\alpha_{x1}}{D_x}}$$

对于总体 Y，同理，可得 $\pi(\mu_y|\bar{Y}_m,\ u_y)$ 和 $\pi(D_x|\bar{Y}_m,\ u_y)$。

由于 2 个随机变量 X 和 Y 彼此无关，所以：

$$\pi(\mu_x,\mu_y\mid\bar{X}_n,\bar{Y}_m,u_x,u_y)\propto$$
$$\pi(\mu_x\mid\bar{X}_n,u_x)\pi(\mu_y\mid\bar{Y}_m,u_y)$$
$$\pi(D_x,D_y\mid\bar{X}_n,\bar{Y}_m,u_x,u_y)\propto$$
$$\pi(D_x\mid\bar{X}_n,u_x)\cdot\pi(D_y\mid\bar{Y}_m,u_y)$$

令 $t=\dfrac{(\mu_x-\mu_y)-(\mu_{x1}-\mu_{y1})}{\sqrt{\dfrac{\alpha_{x1}\eta_{x1}}{\beta_{x1}}+\dfrac{\alpha_{y1}\eta_{y1}}{\beta_{y1}}}}$，　$\mathrm{tg}\phi=\dfrac{\sqrt{\dfrac{\alpha_{y1}\eta_{y1}}{\beta_{y1}}}}{\sqrt{\dfrac{\alpha_{x1}\eta_{x1}}{\beta_{x1}}}}$，则

$$t=\frac{\mu_x-\mu_{x1}}{\sqrt{\dfrac{\alpha_{x1}\eta_{x1}}{\beta_{x1}}}}\cdot\cos\phi-\frac{\mu_y-\mu_{y1}}{\sqrt{\dfrac{\alpha_{y1}\eta_{y1}}{\beta_{y1}}}}\cdot\sin\phi$$。

所以：

$$\pi(t|X,\ Y)\propto\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1+\frac{(z\cos\phi-t\sin\phi)^2}{2\beta_{x1}}\right]^{-\frac{2\beta_{x1}+1}{2}}\left[1+\frac{(z\sin\phi+t\cos\phi)^2}{2\beta_{y1}}\right]^{-\frac{2\beta_{y1}+1}{2}}\mathrm{d}Z$$

令 $w=\dfrac{D_x}{D_y}$，$v=D_x-D_y$，则 $\pi(v\mid X、Y)$。

$$\propto\int_0^{+\infty}w^{-(\beta_{x1}+1)}v^{-(\beta_{x1}+\beta_{y1}+2)}(w-1)^{(\beta_{x1}+\beta_{y1}+2)}e^{-\frac{(w-1)(\alpha_{x1}+\alpha_{y1})}{vw}}\mathrm{d}w$$

求出 t、v 的概率密度函数之后，就可以检验 2 个总体的均值和方差是否相等，从而判断 2 种弹的弹道是否一致。

4　结论

该研究推导出两类风险与用弹量的函数关系，为指导试验、节省用弹提供了依据。由于 Bayes 方法运用了验前信息，在规定的评定标准下可以减小试验的用弹量，在规定用弹量的条件下可以提高试验质量。该方法不但适用于炮弹弹道一致性检验，而且适用于其它产品的一致性检验。

参考文献：

[1] 张尧庭，等. 贝叶斯统计推断[M]. 北京：科学出版社，1991.
[2] James O.Berger. 统计决策论及贝叶斯分析[M]. 北京：中国统计出版社，1998.
[3] 唐雪梅. 武器装备小子样试验分析与评估[M]. 北京：国防工业出版社，2001.
[4] 庄楚强. 应用数理统计基础[M]. 广州：华南理工大学出版社，1993.
[5] 张树霞. 弹带挤进过程的有限元分析[J]. 四川兵工学报，2008(2): 51-52.