

doi: 10.7690/bgzd.2020.10.003

# 基于通用对数线性模型的多应力加速寿命试验预测方法

葛 峰<sup>1,2</sup>, 韩建立<sup>1</sup>, 张光宇<sup>1</sup>

(1. 海军航空大学, 山东 烟台 264001; 2. 中国人民解放军 92419 部队, 辽宁 兴城 125106)

**摘要:** 为解决多应力加速寿命试验中产品寿命预测复杂、建立复合加速模型困难的问题, 提出一种多环境应力加速寿命试验下的寿命预测方法。根据通用对数线性模型的多应力加速模型, 对多应力加速试验的结果数据进行分布检验, 利用应力水平的失效数据对 Weibull 分布参数进行估计, 构建预测模型评价指标, 得出 Weibull 分布规律实现寿命预测, 并对预测结果进行验证评价。评价结果表明: 该方法预测精度较高, 是多加速应力条件下产品寿命预测的一种可行方法。

**关键词:** 通用对数线性模型; K-S 检验; Weibull 分布; 多应力加速模型

**中图分类号:** TP202 **文献标志码:** A

## Multi-stress Accelerated Life Test Prediction Method Based on General Logarithmic Linear Model

Ge Feng<sup>1,2</sup>, Han Jianli<sup>1</sup>, Zhang Guangyu<sup>1</sup>

(1. Navy Aviation University, Yantai 264001, China; 2. No. 92419 Unit of PLA, Xingcheng 125106, China)

**Abstract:** In order to solve the problems of complex product life prediction in multi-stress accelerated life test and the difficulty of establishing a composite acceleration model, a life prediction method under multi-environmental stress accelerated life test is proposed. According to the multi-stress acceleration model of the general logarithmic linear model, the distribution data of the multi-stress acceleration test is used to verify the distribution of the data. The failure data of the stress level is used to estimate the Weibull distribution parameters. Make predictions and verify the evaluation results. Evaluation results show that the method has high prediction accuracy and is a feasible method for product life prediction under multiple accelerated stress conditions.

**Keywords:** general logarithmic linear model; K-S test; Weibull distribution; multi-stress acceleration model

### 0 引言

加速模型是正确反映产品寿命与各环境应力之间数学映射关系的关键。当利用加速试验的结果数据评估预测产品寿命时, 通常采取利用加速模型来外推计算的方式, 从而得到正常应力作用下的寿命<sup>[1]</sup>。在实际中, 产品所处的环境因素多样, 引起的环境应力也较复杂, 比如受到温度、腐蚀、振动、湿度等的综合影响, 导致产品的退化失效。为提高产品加速试验寿命预测精度和试验效率, 更加真实客观地反映产品在实际使用中退化、失效的过程, 得到更加真实可信的寿命预测结果, 有必要在多应力条件下开展相关加速试验设计、寿命评估和预测技术的研究。多应力加速模型是开展寿命预测的重中之重, 实际中建立多应力加速模型通常比较复杂, 笔者基于通用对数线性模型的多应力加速模型<sup>[2]</sup>, 探索获得应用广泛、客观准确、表达直观的加速模型。

### 1 加速试验数据的分布检验与参数估计

#### 1.1 加速试验数据说明

多应力加速模型预测思路如图 1 所示。

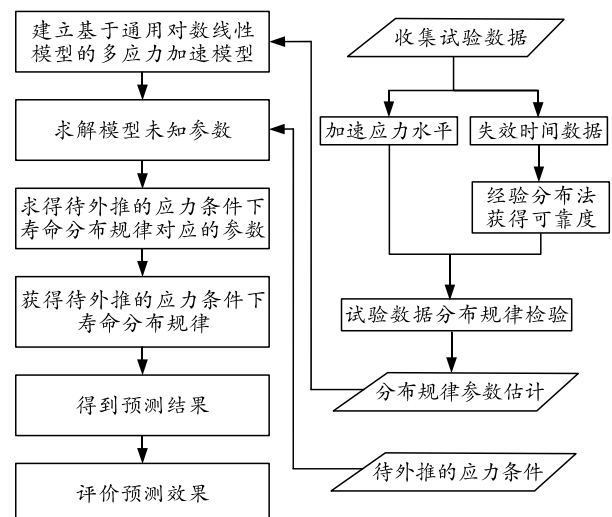


图 1 基于通用对数线性模型的多应力加速模型预测思路

收稿日期: 2020-06-02; 修回日期: 2020-07-15

作者简介: 葛 峰(1988—), 男, 山东人, 硕士, 助理工程师, 从事海军装备综合保障研究。E-mail: 105375796@qq.com。

引用文献[3]中的各智能电表在温度、湿度、电应力不同水平作用下的实验数据进行分析。实验中 5 个应力水平见表 1 所示。

表 1 智能电表多应力加速寿命实验中应力施加情况

应力水平 编号	温度 T/°C	湿度 RH/%	电流 I/A	有效样 本量	无效样 本量
S <sub>1</sub>	80	80	60	56	0
S <sub>2</sub>	55	80	40	54	2
S <sub>3</sub>	55	95	20	56	0
S <sub>4</sub>	70	95	60	55	1
S <sub>5</sub>	70	95	40	56	0

将伪失效寿命数据视为完全寿命数据，对各应

力条件下的实验失效时间数据按照时间序列排列，利用经验分布函数方法计算每个应力条件下的产品失效时间所对应的可靠度。

$$R(t) = 1 - \frac{n(t)}{N} \quad (1)$$

式中： $R(t)$ 为可靠度函数； $n(t)$ 为  $t$  时刻故障的实验样本个数； $N$ 为实验样本数量。以实验中  $S_1$  应力水平下智能电表可靠度与失效时间对应情况为例，不同应力水平下智能电表失效时间与可靠度对应关系见表 2。

表 2 S<sub>1</sub> 应力水平下智能电表可靠度与失效时间对应情况

序号	t/a	R(t)	序号	t/a	R(t)	序号	t/a	R(t)
1	0.206	0.982	20	0.386	0.643	39	0.497	0.304
2	0.284	0.964	21	0.389	0.625	40	0.503	0.286
3	0.292	0.946	22	0.401	0.607	41	0.510	0.268
4	0.293	0.929	23	0.411	0.589	42	0.514	0.250
5	0.304	0.911	24	0.421	0.571	43	0.525	0.232
6	0.305	0.893	25	0.425	0.554	44	0.531	0.214
7	0.317	0.875	26	0.426	0.536	45	0.536	0.196
8	0.323	0.857	27	0.433	0.518	46	0.572	0.179
9	0.326	0.839	28	0.441	0.500	47	0.573	0.161
10	0.335	0.821	29	0.442	0.482	48	0.587	0.143
11	0.343	0.804	30	0.446	0.464	49	0.596	0.125
12	0.344	0.786	31	0.451	0.446	50	0.603	0.107
13	0.351	0.768	32	0.455	0.429	51	0.648	0.089
14	0.356	0.750	33	0.457	0.411	52	0.658	0.071
15	0.363	0.732	34	0.468	0.393	53	0.705	0.054
16	0.369	0.714	35	0.477	0.375	54	0.712	0.036
17	0.369	0.696	36	0.480	0.357	55	0.752	0.018
18	0.379	0.679	37	0.482	0.339	56	0.782	0.000
19	0.385	0.661	38	0.488	0.321			

根据上表，可得实验中  $S_1$ — $S_5$  应力水平下对应的智能电表可靠度与失效时间直线散点见图 2。

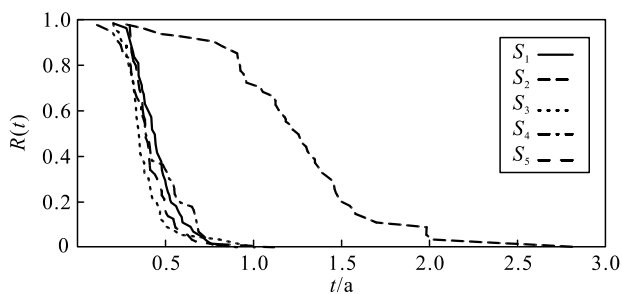


图 2 S<sub>1</sub>—S<sub>5</sub> 应力水平对应下  $R(t)$ 、 $t$  的直线散点

### 1.2 加速试验数据分布规律检验

可靠性工程的研究实践中，对于机电类产品累计失效模式，应用最为广泛的寿命分布规律模型为 Weibull 分布、指数分布和正态分布等。为使后续利用试验数据开展外推预测更加准确可靠，应对实验数据的分布规律进行检验<sup>[4]</sup>。笔者利用柯尔莫哥洛夫-斯莫洛夫 (Kolmogorov-Smirnov, K-S) 检验，对各应力水平下实验结果所符合的分布规律进行验证<sup>[5]</sup>。K-S 检验由苏联数学家 Kolmogorov 与

Smirnov 共同提出。此方法基于累计分布函数，是验证 2 个随机分布之间相似状况的一种非参数统计方法<sup>[6-7]</sup>，在识别 2 类不同样本的分布形状差异时十分灵敏，通常用于对 2 个分布之间的差异进行分析，以判断样本的观察结果是否来自特定分布，是一种具有广泛应用性的分布规律检验方法<sup>[8]</sup>。其检验规则为：对于给定显著性水平  $\alpha$ ，若  $D_n > D_{n,\alpha}$ ，拒绝  $H_0$ ；若  $D_n < D_{n,\alpha}$ ，接受  $H_0$ 。其中： $D_n$  为最大垂直距离； $D_{n,\alpha}$  为临界值。利用 Matlab 中 kstest 函数对  $S_1$ — $S_5$  应力水平下实验结果数据进行 K-S 检验，结果如表 3。

表 3 各应力条件下实验结果数据分布规律检验情况

分布类型	应力条件				
	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>
Weibull 分布	接受	接受	接受	接受	接受
指数分布	拒绝	拒绝	拒绝	拒绝	拒绝
正态分布	拒绝	拒绝	拒绝	拒绝	拒绝

由表可见：实验结果数据分布规律在显著性水平  $\alpha = 0.05$  的情况下，可认为服从 Weibull 分布，后续将以 Weibull 分布对寿命进行外推预测。

1.3 Weibull 分布的参数估计

Weibull 分布基于最薄弱环节理论得出,是典型的串联式可靠性模型,可以全面描述材料自身缺陷和集中应力对疲劳寿命的累计作用<sup>[9-10]</sup>。由于 Weibull 分布兼容性良好,使其在不可维修产品的寿命研究中获得了最广泛的应用<sup>[11]</sup>。指数分布常用于电子设备可靠性预测,若尺度参数  $\eta=1$ ,那么 Weibull 分布即转化为指数分布。正态分布常用于描述随时间退化产品的故障分布,当形状参数  $3 \leq \beta \leq 4$  时,Weibull 分布可近似为正态分布,从这一角度分析,笔者选用 Weibull 分布也是合理的。其概率密度函数、分布函数和可靠度函数<sup>[12]</sup>分别为:

$$f(t) = (\beta/\eta)(t/\eta)^{\beta-1} e^{-(t/\eta)^\beta}; \quad (2)$$

$$F(t) = 1 - e^{-(t/\eta)^\beta}; \quad (3)$$

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-(t/\eta)^\beta}. \quad (4)$$

式中:  $\beta$  为形状参数;  $\eta$  为尺度参数。

外推预测其他应力水平下的寿命,需获得该应力水平下 Weibull 分布的参数估计值。对于 Weibull 分布的参数估计,常用的方法有图形法、矩估计法、极大似然估计法(maximum likelihood estimation, MLE)、最小二乘估计和贝叶斯估计(Bayesian estimation),图形法通常估计误差较大、精度不高;最小二乘估计计算方法相对简单,但计算结果偏差较大;矩估计涉及超越方程,一般情况下无显示解,求解方程须利用数值解析法;贝叶斯估计须进行积分计算,计算困难<sup>[13-14]</sup>。虽然极大似然估计计算复杂,但在加速试验的外推预测中使用较为广泛,笔者采用极大似然估计对  $S_1, S_2, S_3, S_4$  应力条件下 Weibull 分布参数开展估计,即根据加速试验结果反推能够造成样本值出现概率最大所对应的参数,设  $\theta = (\beta, \eta)$ ,那么对数似然函数<sup>[15]</sup>为:

$$\ln[L(\theta|t)] = \sum_{i=1}^n [\ln \beta + (\beta - 1) \ln t_i - \beta \ln \eta - (t_i/\eta)^\beta] + \sum_{i=1}^n [-(t_i/\eta)^\beta]. \quad (5)$$

对上式分别取 2 个参数的偏导:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln[L(\theta|t)]}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial \ln[L(\theta|t)]}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

结合式(5)、式(6)可得

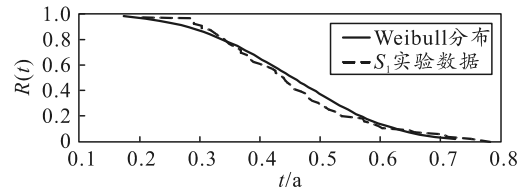
$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\beta} + \ln t_i - \ln \eta - \left( \frac{t_i}{\eta} \right)^\beta \ln \left( \frac{t_i}{\eta} \right) \right] + \sum_{i=1}^n \left[ - \left( \frac{t_i}{\eta} \right)^\beta \ln \left( \frac{t_i}{\eta} \right) \right] &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \left[ - \frac{\beta}{\eta} + \left( \frac{\beta}{\eta} \right) \left( \frac{t_i}{\eta} \right)^\beta \right] + \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\beta}{\eta} \right) \left( \frac{t_i}{\eta} \right)^\beta \right] &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

求解上述方程即可得到参数估计值  $\hat{\beta}$ 、 $\hat{\eta}$ ,将  $S_1, S_2, S_3, S_4$  应力条件下的实验数据代入式(7)。经计算,可得在置信度 95%时参数估计值,具体见表 4 所示。

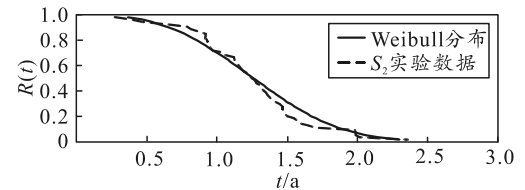
表 4  $S_1$ — $S_4$  应力水平下 Weibull 分布参数的极大似然估计

估计值	应力条件			
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
形状参数 $\beta$	3.804 1	2.925 2	2.607 8	2.763 7
尺度参数 $\eta$	0.501 5	1.425 9	0.438 9	0.497 5

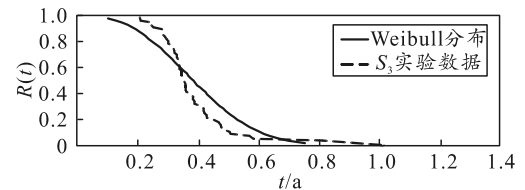
根据表 4 以及  $S_1, S_2, S_3, S_4$  应力条件下的实验数据,可画出相应应力条件下置信度为 95%时,参数估计所确定的 Weibull 分布与实际实验数据之间的比较见图 3。



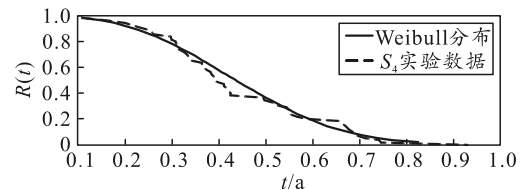
(a)  $S_1$  应力条件下的实验结果与 Weibull 分布对比



(b)  $S_2$  应力条件下的实验结果与 Weibull 分布对比



(c)  $S_3$  应力条件下的实验结果与 Weibull 分布对比



(d)  $S_4$  应力条件下的实验结果与 Weibull 分布对比

图 3  $S_1$ — $S_4$  应力条件下的实验结果与相应 Weibull 分布之间对应关系

根据图 3 可以明显看出,经置信度 95%的参数估计所得 Weibull 分布较好地拟合了  $S_1$ — $S_4$  应力水

平下的实验数据。从定量分析角度看，根据表 4 可计算得到置信度为 95% 的参数估计所得的 Weibull 分布与各应力条件下的实验数据之间的平均相对误差 (Are)，计算所得如表 5 所示，可以验证 Weibull 分布的拟合效果良好。

表 5  $S_1-S_4$  应力水平下 Weibull 分布拟合效果 %

应力条件	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
Are	5.19	6.95	9.51	5.77

## 2 多应力加速模型的建立与预测

### 2.1 多应力加速模型的建立

通用对数线性模型主要用于多加速应力的情况，应用该模型建立多应力加速模型，寿命特征  $L$  为应力  $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的函数，多应力加速寿命模型<sup>[16]</sup>为：

$$L(X) = \exp\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j\right) \quad (8)$$

式中： $L$  为产品寿命特征； $\alpha_j$  为模型参数； $X$  为加速应力向量。根据上式建立多应力加速模型只要把  $X_i$  用对应的温度、湿度、电应力 3 应力变量进行替换，结合文献[17]，根据式(8)，建立三应力加速模型：

$$L(X) = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 RH + \alpha_3 I) \quad (9)$$

式中： $T$  为温度； $RH$  为湿度； $I$  为电流，即各应力水平下的实验条件具体取值； $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为需估计的参数。

根据  $S_1, S_2, S_3, S_4$  应力条件作用下实验数据，对待估参数进行估计，结合实验结果数据服从的分布规律，计算得到  $S_5$  应力条件下的分布参数估计。

### 2.2 预测模型评价指标的建立

为验证模型的预测结果，笔者使用平均相对误差 (Are)、拟合优度 (Cod) 2 个参数作为预测模型的评价指标<sup>[18]</sup>。平均相对误差是相对误差的平均值，是一个百分数，值越小，表示模型预测结果越好，拟合优度值域为[0,1]，计算结果越接近 1，则表示模型的预测效果越好，公式如下：

$$\text{Are} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_{\text{model},i} - y_{\text{ture},i}}{y_{\text{ture},i}} \right| \quad (10)$$

$$\text{Cod} = \frac{\left( n \sum_{i=1}^n y_{\text{model},i} y_{\text{ture},i} - \sum_{i=1}^n y_{\text{model},i} \sum_{i=1}^n y_{\text{ture},i} \right)^2}{\left[ n \sum_{i=1}^n y_{\text{model},i}^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_{\text{model},i} \right)^2 \right] \left[ n \sum_{i=1}^n y_{\text{ture},i}^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_{\text{ture},i} \right)^2 \right]} \quad (11)$$

式中： $n$  为样本数量； $y_{\text{model},i}(i=1,2,\dots,n)$  为第  $i$  个样本的模型预测值； $y_{\text{ture},i}(i=1,2,\dots,n)$  为第  $i$  个样本的真实值。

### 2.3 模型的预测及验证

由于实验结果数据服从 Weibull 分布，那么 Weibull 分布的尺度参数  $\eta$ 、形状参数  $\beta$  就反映了电表的寿命特征，可以认为尺度参数  $\eta$ 、形状参数  $\beta$  与影响失效时间的多应力之间存在直接关系，根据通用对数线性模型式(9)，可得

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \exp(\alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 RH + \alpha_3 I) \\ \beta &= \exp(\alpha_4 + \alpha_5 T + \alpha_6 RH + \alpha_7 I) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将上式两边同时取对数，可得

$$\left. \begin{aligned} \ln \eta &= \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 RH + \alpha_3 I \\ \ln \beta &= \alpha_4 + \alpha_5 T + \alpha_6 RH + \alpha_7 I \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

根据表 1，将应力条件水平及表 4 的  $\eta, \beta$  参数估计值代入式(13)，求解方程组得到参数； $\alpha_0 \sim \alpha_7$  的估计值如表 6 所示。

表 6 通用对数线性模型未知参数的估计

参数	估计值	参数	估计值
$\alpha_0$	7.337 1	$\alpha_4$	1.319 8
$\alpha_1$	-0.030 2	$\alpha_5$	0.009 0
$\alpha_2$	-0.059 3	$\alpha_6$	-0.010 2
$\alpha_3$	-0.014 5	$\alpha_7$	0.001 9

结合式(12)可得：

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \exp(7.3371 - 0.0302T - 0.0593RH - 0.0145I) \\ \beta &= \exp(1.3198 + 0.0090T - 0.0102RH + 0.0019I) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由式(4)可得：

$$t = \eta(-\ln R)^{1/\beta} \quad (15)$$

结合式(14)、式(15)可得智能电表寿命  $t$  在温度、湿度、电应力作用下与可靠度  $R$  之间的表达式为：

$$t = \exp(7.3371 - 0.0302T - 0.0593RH - 0.0145I) \cdot (-\ln R)^{\frac{1}{\exp(1.3198 + 0.0090T - 0.0102RH + 0.0019I)}} \quad (16)$$

应力  $S_5 = \{T = 70, RH = 95\%, I = 40A\}$  条件下，应用式(14)可计算得出  $\eta, \beta$ ，外推出在应力条件  $S_5$  情况下的寿命分布规律符合  $\eta=0.3725, \beta=2.8716$  的 Weibull 分布，即  $t = 0.3725(-\ln R)^{1/2.8716}$ 。由于可靠度  $R=0$  时，会出现  $\ln 0$  的无穷值情况，此时预测值无意义，故对表 2 中  $S_5$  数据里  $R$  不为 0 的 1~55 号数据进行外推预测，外推预测情况及相对误差见图 4。

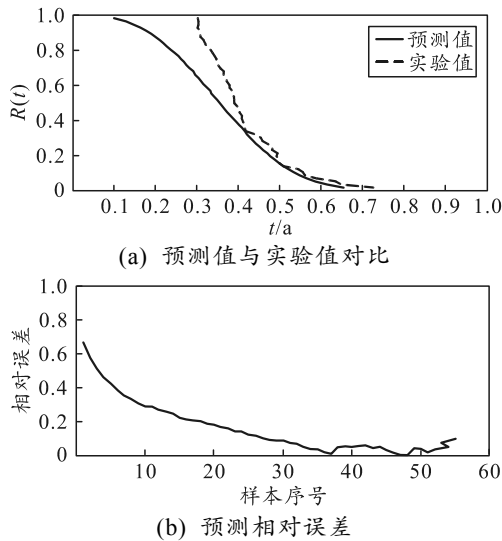


图 4 通用对数线性模型的外推预测情况

利用式(10)平均相对误差、式(11)拟合优度开展评价, 结合通用对数线性模型的多应力加速模型, 根据 Weibull 分布, 外推  $S_5$  应力水平下的寿命平均相对误差、拟合优度计算结果见表 7。

表 7 通用对数线性模型模型预测效果

预测方法	Are/%	Cod
基于通用对数线性模型的多应力加速模型	14.23	0.926 7

由图 4 及表 7 可以看出: 通用对数线性模型实际的预测效果较好, 预测的平均相对误差为 14.23%, 前段的预测效果偏差较大, 中后段的预测效果良好。

### 3 结束语

笔者利用极大似然估计对各应力水平下的 Weibull 分布进行参数估计, 利用估计值对通用对数线性模型中未知参数进行求解, 得到应力条件与 Weibull 分布形状参数、尺度参数之间的关系, 进而结合待外推应力条件得到寿命分布规律, 利用该寿命分布规律对  $S_5$  应力水平下的寿命进行预测, 利用平均相对误差和拟合优度 2 个参数对预测效果进行了评价。可以看出: 基于通用对数线性模型的多应力加速模型预测精度较高, 可实现多种应力水平组合下寿命分布情况的外推预测, 具有良好的泛化性和适用性。

### 参考文献:

[1] 李晓阳, 姜同敏. 加速寿命试验中多应力加速模型综述[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(5): 828-831.  
 [2] 王华, 张静远, 王鹏, 等. 基于广义对数线性模型的可靠性评估方法[J]. 兵器装备工程学报, 2018, 39(3):

101-104.  
 [3] 查国清, 黄小凯, 康锐. 基于多应力加速试验方法的智能电表寿命评估[J]. 北京航空航天大学学报, 2015, 41(12): 2217-2224.  
 [4] 梁朝虎, 傅惠民. Weibull 分布置信检验方法[J]. 机械强度, 2004(3): 265-269.  
 [5] HAMED K, ALI K S, MOHAMMAD A, et al. Nonlinear Analysis of the Contour Boundary Irregularity of Skin Lesion Using Lyapunov Exponent and K-S Entropy[J]. Journal of Medical and Biological Engineering, 2017, 37(3): 109-117.  
 [6] 吴华伟, 叶从进, 聂金泉. 基于 K-S 检验法和 ALTA 的 IGBT 模块可靠性寿命分布研究[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2019, 38(1): 119-124.  
 [7] 刘艳, 程璐, 孙林. 基于 K-S 检验和邻域粗糙集的特征选择方法[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2019, 47(2): 21-28.  
 [8] MORA-LOPEZ L, MORA J. An adaptive algorithm for clustering cumulative probability distribution function using the Kolmogorov-Smirnov two-sample test[J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(8): 4016-4021.  
 [9] 刘婷. Weibull 分布对数线性加速模型的可靠性估计方法[J]. 系统仿真学报, 2011, 23(1): 29-32.  
 [10] 荣雪琴, 刘勇, 刘昊, 等. 基于电能表剩余寿命预测的 Weibull 分布优化研究[J/OL]. 电测与仪表, 1-7[2019-09-15].http://kns.cnki.net/kcms/detail/23.1202.th.20190723.1346.002.html.  
 [11] LUIS C M G, LUIS A R P, DELIA J V R, et al. Reliability analysis using exponentiated Weibull distribution and inverse power law[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2019, 35(4): 109-117.  
 [12] 王晓, 赵河明, 彭志凌. 基于 Weibull 分布的机电引信贮存寿命预测[J]. 兵工自动化, 2018, 37(11): 72-75.  
 [13] 凌丹, 何俐萍, 许镇卫, 等. 基于威布尔分布的疲劳剩余寿命可靠性预测方法[J]. 机械设计, 2011, 28(7): 50-53.  
 [14] 金良琼. 两参数 Weibull 分布的参数估计[D]. 昆明: 云南大学, 2010.  
 [15] 雷刚. Weibull 分布寿命数据的参数估计[D]. 武汉: 华中科技大学, 2006.  
 [16] 姚程. 广义线性模型和参数估计的理论与方法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2016.  
 [17] 张景元, 何玉珠, 崔维佳. 基于多应力退化模型的智能电表可靠寿命预估[J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(8): 1662-1669.  
 [18] 骆正山, 姚梦月, 骆济豪, 等. 基于 KPCA-BAS-GRNN 的埋地管道外腐蚀速率预测[J]. 表面技术, 2018, 47(11): 173-180.